

Devoir de vacances

(Calculatrice non autorisée)

Ce devoir de vacances, élaboré par vos futurs enseignants de mathématiques et physique-chimie a pour objectif de vous faire réviser des parties très importantes du programme de mathématiques. La correction est jointe à ce devoir.

A la rentrée, vous aurez votre premier devoir surveillé de mathématiques/physique-chimie qui sera évalué et noté. Le sujet sera proche de celui-ci. Nous comptons donc sur vous pour maîtriser les notions qui y apparaissent.

Vous pourrez noter qu'aucune connaissance du programme de spécialité physique-chimie n'est nécessaire pour répondre aux questions de ce devoir.

Première partie

Compétences exigibles en physique/chimie

- ☐ Citer les expressions du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'une sphere, du volume d'une boule, du volume d'un cylindre. (Voir exercice 1)
- ☐ Résoudre une équation du 1^{er} degré. (Voir exercice 2)



- ☐ Résoudre une équation du 2nd degré. (Voir exercice 2)
- ☐ Tracer une droite d'équation donnée. (Voir exercice 3)
- ☐ Trouver graphiquement l'équation d'une droite. (Voir exercice 5)
- ☐ Résoudre un système de deux équations à deux inconnues. (Voir exercice 3)
- ☐ Connaître (dérivée, primitive, limites, allure) les fonctions usuelles : exponentielle, logarithme népérien et decimal, cosinus, sinus, tangente. (Voir exercice 4)
- ☐ Représenter graphiquement une fonction, déterminer un comportement asymptotique et rechercher un extremum local. (Voir exercice 5)
- ☐ Utiliser le cercle trigonométrique et l'interprétation géométrique des fonctions cosinus, sinus et tangente – Relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, relations entre fonctions trigonométriques et toutes relations du type $\cos(\pi \pm x)$ et $\cos(\pi/2 \pm x)$, valeurs des fonctions pour les angles usuels. (Voir exercice 6)
- ☐ Citer les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus. (Voir exercice 6)
- ☐ Trouver la solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants $y' + ay = b$. (Voir exercice 7)
- ☐ Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. (Voir exercice 8)
- ☐ Projeter un vecteur, interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée. (Voir exercice 8)

1 Longueurs, aires et volumes classiques

Exprimer en fonction de R et h :

1. le périmètre P d'un cercle de rayon R ;
2. l'aire S d'un disque de rayon R ;
3. l'aire S d'une sphere de rayon R ;
4. le volume V d'une boule de rayon R ;
5. le volume V d'un cylindre de rayon R et de hauteur h .

2 Calculs de base

Déterminer la/les valeurs de x arrondi au centième dans les cas suivants :

1. $\frac{3x}{-2} = -4x + \frac{5}{2}$

2. $x = \frac{\frac{5}{-4}}{\frac{30}{4} + \frac{5}{2}}$

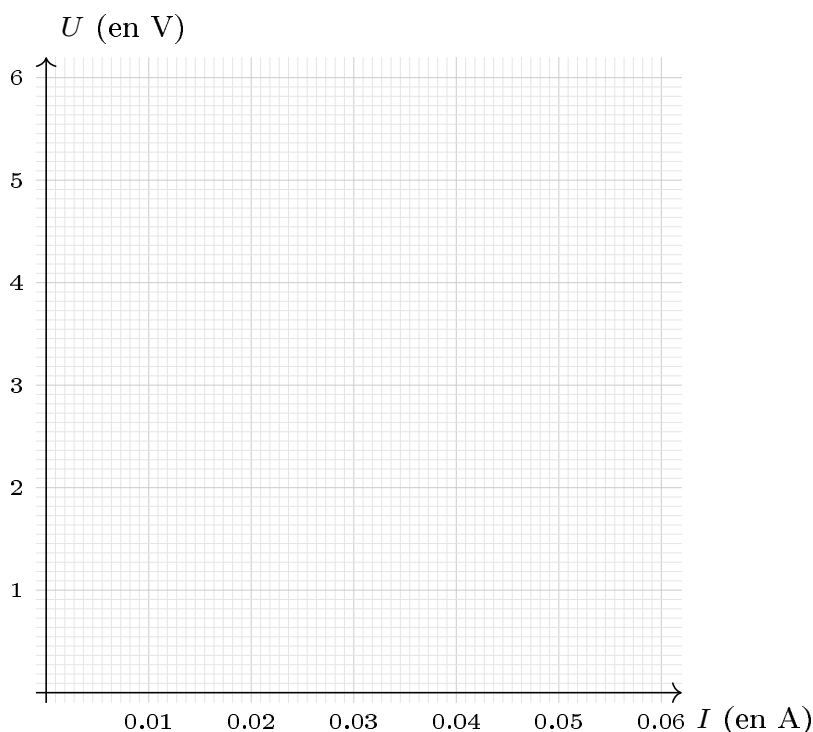
3. $x^2 = 4$

4. $3x^2 - 2x - 1 = 0$

3 Équations algébriques

Un générateur de tension réel parcouru par un courant I délivre une tension U telle que $U = 6 - 100 \times I$ avec U en volt et I en ampère. Une résistance $R = 100 \, \Omega$ est reliée à ce générateur. D'après la loi d'OHM, la tension à ses bornes U est proportionnelle à l'intensité la parcourant $U = 100 \times I$ avec U en volt et I en ampère.

1. Écrire le système d'équation vérifié par U et I puis le résoudre.
2. Tracer ci-dessous les droites d'équation $U = 6 - 100 \times I$ et $U = 100 \times I$.
3. Quelle est l'ordonnée à l'origine de la droite d'équation $U = 6 - 100 \times I$?
4. Quelle est le coefficient directeur (appelé également pente) de la droite d'équation $U = 6 - 100 \times I$?
5. Retrouver graphiquement le résultat obtenu question 1..



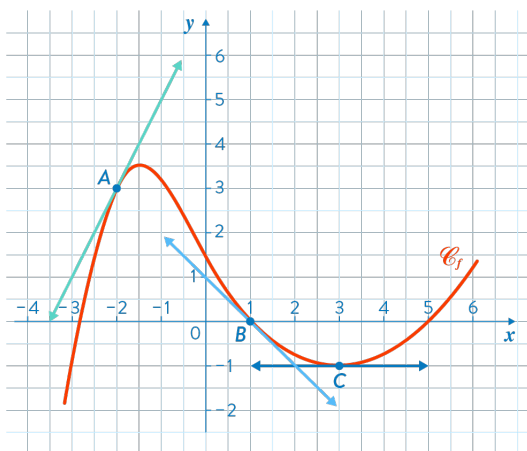
4 Fonctions

Soient les fonctions $f(x) = \exp(2x)$, $g(x) = \exp(3x)$, $h(x) = \cos(x)$ et $p(x) = 2x + 3$. Donner si possible une forme simplifiée de :

1. $f(x) \times g(x)$
2. $\frac{f(x)}{g(x)}$
3. $f'(x)$
4. une primitive $G(x)$ de $g(x)$
5. $(h \circ p)'$

5 Représentation graphique d'une fonction

1. Soit le graphe ci-dessous décrivant la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[-4, 6]$.



- 1.1. Calculer $f'(3)$.
 1.2. Déterminer l'équation de la tangente en $x = 1$.
2. Soit la fonction $f(x) = 1 + 4 \left(\frac{1}{x} - x \right)^2$ telle que $x > 0$. Passe t-elle par un extremum ? Si oui, le déterminer et tracer le tableau de variation de f pour $x > 0$.

6 Trigonométrie

1. Soient a, b et x des réels quelconques. Exprimer en fonction des fonctions cos et/ou sin :

1.1. $\cos(a + b) = \dots\dots\dots$

1.2. $\sin(a + b) = \dots\dots\dots$

1.3. $\cos(2x) = \dots \cos^2(x) \dots\dots$

1.4. $\sin(2x) = \dots \sin(x) \dots\dots\dots$

1.5. $\tan(x) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

1.6. $\cos(\pi + x) = \dots\dots\dots$

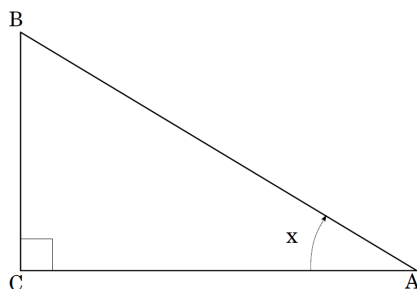
1.7. $\sin(\pi/2 - x) = \dots\dots\dots$

2. Compléter :

2.1. $\cos(\pi/4) = \dots\dots\dots$

2.2. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = \dots$

3. Soit le triangle ABC ci-dessous.



Exprimer, en fonction de AB et/ou BC et/ou AC :

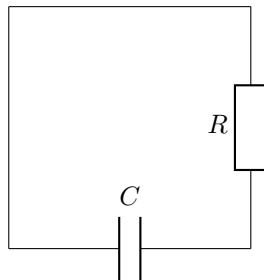
3.1. $\cos(x) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

3.2. $\sin(x) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

3.3. $\tan(x) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

7 Équations différentielles

Soit le circuit ci-dessous constitué d'un condensateur de capacité $C = 10^{-6}$ F et d'une résistance $R = 10^3 \Omega$.



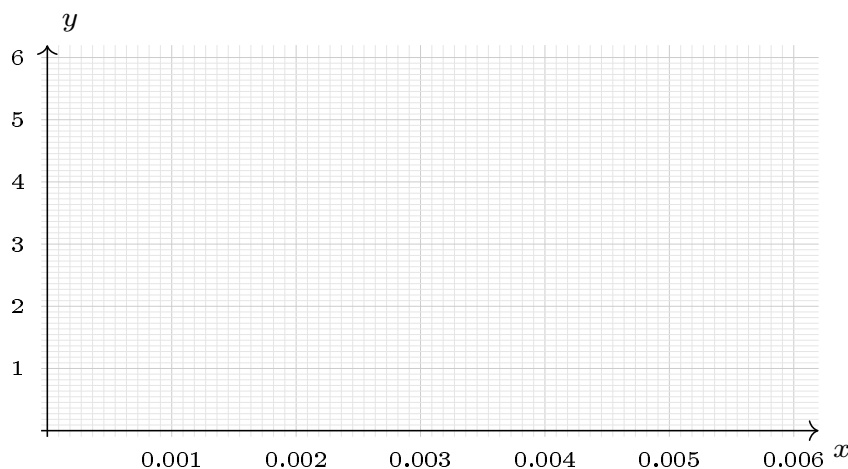
Lors de la décharge du condensateur, initialement chargé à la tension $E = 6V$, on montre que u_C vérifie l'équation suivante :

$$0,001 \times \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

Notation pour ceux n'ayant pas suivi la spécialité physique en terminale: on note x le temps et f la fonction décrivant l'évolution au cours du temps de la tension u_C aux bornes du condensateur telle que $y = f(x)$. L'équation précédente s'écrit alors

$$0,001 \times y' + y = 0 \quad (1)$$

1. Décrire par une phrase l'équation (1).
2. Résoudre cette équation.
3. Tracer ci-dessous $y = f(x)$ sachant que $f(0) = 6$.



8 Géométrie

1. Un vecteur est défini par une, une et un

Un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme vaut

Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \dots\dots\dots$

Produit scalaire : $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \times \|\vec{v}_2\| \times \dots\dots\dots$ avec $\theta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

Si le vecteur $\vec{v}_1$ a pour composantes $(v_{1x}; v_{1y})$ et le vecteur $\vec{v}_2$ a pour composantes $(v_{2x}; v_{2y})$ alors

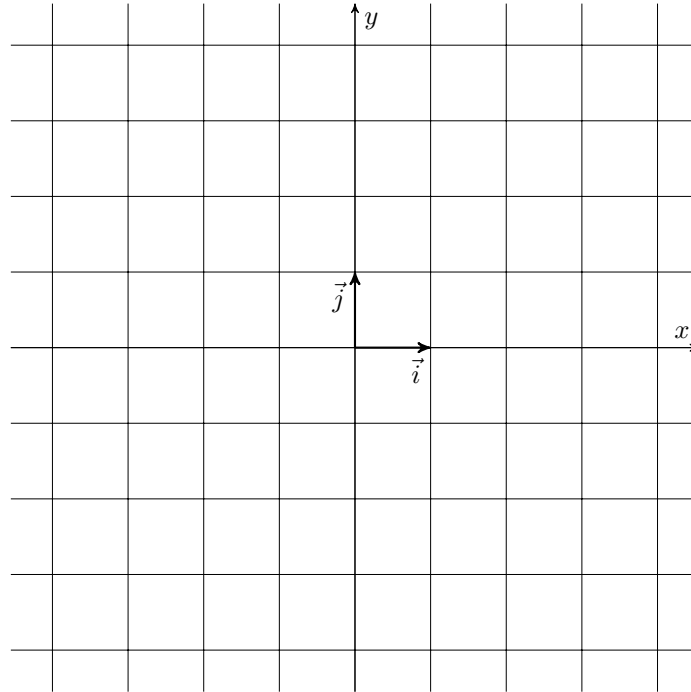
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x} \times \dots + v_{1y} \times \dots$$

Norme d'un vecteur : $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \dots$

Si le vecteur $\vec{v}$ a pour composantes $(v_x; v_y)$ alors $\|\vec{v}\| = \dots$

Projection d'un vecteur : Si le vecteur $\vec{v}$ a pour composantes $(v_x; v_y)$ dans la base $(\vec{u}_x; \vec{u}_y)$ alors $v_x = \vec{v} \cdot \dots$

2. Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



2.1. Construire un carré ABCD de centre O tel que $\|\vec{AB}\| = 4$.

2.2. Construire les vecteurs $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{OD}$ et $\vec{v} = \vec{AD} - \vec{OC}$

2.3. Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{AD}$.

2.4. Calculer la norme du vecteur $\vec{AD}$.

2.5. Soit le vecteur $\vec{w}$ tel que $\|\vec{w}\| = \sqrt{2}$ et $\alpha = \widehat{(\vec{i}, \vec{u})} = 45^\circ$. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Deuxième partie

Compétences exigibles en mathématiques

- ☐ Maîtriser les techniques opératoires: développement-factorisation-simplification de fraction. (Voir exercice 1)
- ☐ Résoudre des équations du 1^{er} degré ou du 2nd degré. (Voir exercice 2 et l'exercice 2 donné en Physique)
- ☐ Maîtriser les calculs sur les inégalités et résoudre des inéquations. (Voir exercice 3)
- ☐ Maîtriser les techniques calculatoires sur les puissances, les logarithmes et les exponentielles. (Voir exercice 4 et l'exercice 4 donné en Physique)
- ☐ Savoir étudier une fonction: ensemble de définition, dérivation, limites, tangente, asymptote. (Voir exercice 5 et l'exercice 4 donné en Physique)
- ☐ Savoir trouver une primitive et calculer une intégrale. (voir l'exercice 6 et l'exercice 4 donné en Physique)
- ☐ Savoir étudier une suite numérique: nature, monotonie, limite, majoration ou minoration, somme des termes (raisonnement par récurrence pour ceux qui ont fait spé maths en Terminale) (Voir exercice 7)
- ☐ Connaître les fonctions trigonométriques et les formules associées: $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$ (Voir exercice 8 et l'exercice 6 donné en Physique)

1 Techniques opératoires

1. Développer $A = (x - y^2)(x + y^2)(x^2 + y^4)$.
 2. Factoriser $B = (x + 1)(y^2 + 2) - y(2x + 2) - (x + 1)$.
- En déduire que $B = 0$ si et seulement si $x = -1$ ou $y = 1$.
- 3.

3.1. Simplifier l'expression $C = \frac{\frac{x+2}{3}}{1 + \frac{1}{x}}$.

3.2. En déduire, sans faire de calcul, une forme simplifiée de $D = \frac{\frac{\sqrt{t+1}+2}{3}}{1 + \frac{1}{\sqrt{t+1}}}$ et de $E = \frac{\frac{t+3}{3}}{1 + \frac{1}{t+1}}$.

2 Équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\frac{x+1}{x-1} = a$ en fonction de $a \in \mathbb{R}$. (On distinguera deux cas pour la valeur de a).
2. $x^2 = 3x$.
3. $2x^2 - 5x - 3 = 0$.
4. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

3 Inégalités et inéquations

1. On suppose que $2 < x \leq 4$ et que $1 \leq y \leq 3$.

Donner les meilleurs encadrements possibles de $a = x - y$, $b = xy$ et $c = \frac{x}{y}$.

2. Déterminer l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'inéquation $\frac{x+2}{x+1} \leq 1$.

3.
 - 3.1. Déterminer l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'inéquation $(x-1)^2 \geq 9$.
 - 3.2. En déduire l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'inéquation $x \geq \sqrt{2x+8}$.

4. Déterminer le signe de $f(x) = x(|x| - 1)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

4 Puissances, logarithme et exponentielle

1. Exprimer sous forme de produit d'une puissance de a avec une puissance de b la quantité $A = \frac{(ab)^2 a^3 b^{-4}}{a^2 b^2 (ab)^{-3}}$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et les relations $u_{n+1} = u_n^3$ pour tout $n \geq 0$.

2.1. Calculer u_1 et u_2 .

2.2. (Pour ceux qui ont suivi la spécialité maths en terminale)

Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 2^{3^n}$.

3. Simplifier $B = \frac{\sqrt{10^6}}{1000 + \sqrt{10^2}}$.

4. Simplifier les expressions suivantes :

4.1. $C = \ln(e^3) + \ln(\sqrt{e})$.

4.2. $D = e^{-\ln(2) + \ln(4)}$.

5. Résoudre l'inéquation $\ln(1-x) \leq 0$.

5 Étude de fonctions

On considère la fonction f définie par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. Déterminer l'ensemble I des réels x tels que $f(x)$ existe.

2. Exprimer la dérivée de f et étudier son signe.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine.
4. Construire le tableau de variations de f .
5. Donner l'équation d'une asymptote à la courbe de f , et préciser les points où la tangente à la courbe de f est parallèle à l'axe des abscisses.
6. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe de f , l'asymptote et la tangente horizontale.

6 Intégration

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction f définie par $f(x) = 2x^4 - x^2 + \frac{1}{x^2}$.
2. Déterminer l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par $g(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$ qui s'annule en $x = 0$.
3. Calculer la valeur de

$$I = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx.$$

7 Suites et récurrence

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 8 \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 8$.

- 1.1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.
- 1.2. Exprimer v_n en fonction de n .
- 1.3. En déduire que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 8 - 7 \times 2^n$.
- 1.4. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
- 1.5. Calculer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.
- 1.6. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle majorée, minorée, bornée ?

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{3 - u_n} \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

- 2.1. (Pour ceux qui ont suivi la spécialité maths en terminale)
En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n < 1$.
- 2.2. Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} , puis exprimer v_{n+1} en fonction de u_n .
- 2.3. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{2}$.
- 2.4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
3. Exprimer, en fonction de n , sans symbole Σ la valeur de $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{2^k}$.

8 Trigonométrie

1. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2.

- 2.1. Déterminer les solutions $x \in [-\pi; \pi]$ de $\sin(x) = 0$.
- 2.2. Déterminer les solutions $x \in [-\pi; \pi]$ de $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
- 2.3. En utilisant une formule de trigonométrie, factoriser $A = \sin(x) - \sin(2x)$, puis résoudre l'équation $\sin(x) - \sin(2x) = 0$ dans $[-\pi; \pi]$.

Devoir de vacances – Corrigé

1 Longueurs, aires et volumes classiques

1. $P = 2\pi R$;
2. $S = \pi R^2$;
3. $S = 4\pi R^2$;
4. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$;
5. $V = \pi R^2 h$.

2 Calculs de base

1. $x = 1,00$;
2. $x = -0,125$
3. $x = 2,00$ ou $x = -2,00$;
4. $\Delta = 16$, $x = 1,00$ ou $x = -0,33$.

3 Équations algébriques

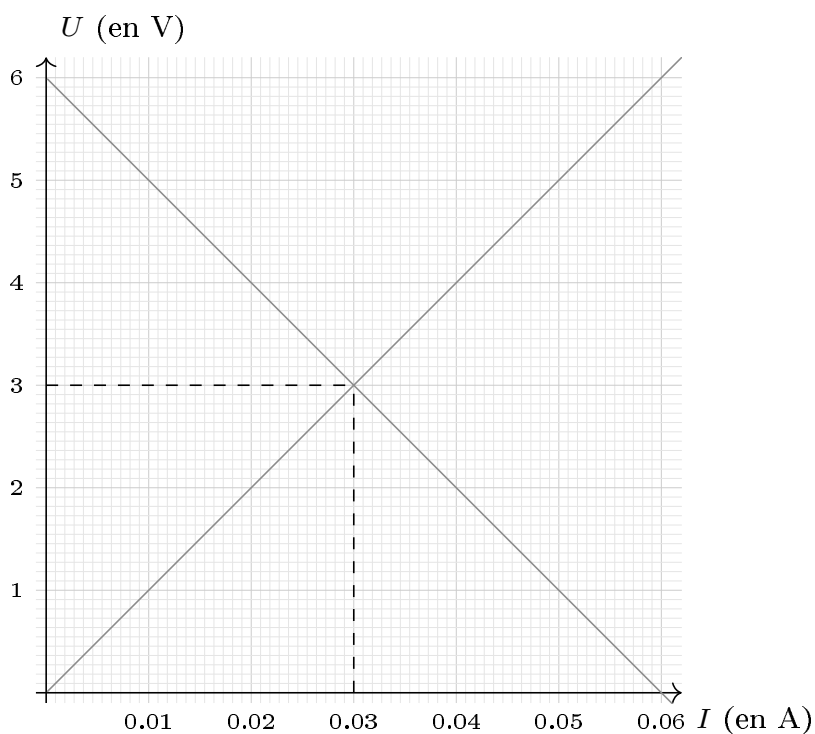
1.
$$\begin{cases} U = 6 - 100 \times I & (1) \\ U = 100 \times I & (2) \end{cases}$$

$$(1) = (2) \Rightarrow 6 - 100 \times I = 100 \times I \Rightarrow 6 = 100 \times I + 100 \times I \Rightarrow 6 = 200 \times I \Rightarrow I = \frac{6}{200}$$

$$\Rightarrow \underline{I = 0,03 \text{ A}}$$

$$(2) \Rightarrow U = 100 \times 0,003 \Rightarrow \underline{U = 3 \text{ V}}$$

2.



3. L'ordonnée à l'origine est 6.
4. Le coefficient directeur est -100.
5. Voir graphique ci-dessus. Les coordonnées du point d'intersection des deux droites correspondent aux solutions du système question (1.). On détermine graphiquement $\underline{U = 3,0 \text{ V}}$ et $\underline{I = 0,030 \text{ A}}$.

4 Fonctions

1. $f(x) \times g(x) = \exp(5x)$
2. $\frac{f(x)}{g(x)} = \exp(-x)$
3. $f'(x) = 2 \exp(2x)$
4. $G(x) = \frac{1}{3} \exp(3x) + cte$
5. $(h \circ p)' = p' \times (h' \circ p) \Rightarrow (h \circ p)' = -2 \sin(2x + 3)$

5 Représentation graphique d'une fonction

1. Pour une fonction donnée $f(x)$ définie sur un intervalle donné, la valeur de la pente (coefficient directeur) de la tangente à la courbe en un point de cette courbe égale la valeur de la fonction dérivée $f'(x)$ en ce point.

Donc, $\underline{f'(3) = 0}$ (pente nulle).

Soit $y = ax + b$ l'équation de la tangente. $a = f'(1) = \frac{1 - (-1)}{0 - 2} \Rightarrow a = -1$. De plus, la droite coupe l'axe des ordonnées en $b = 1$. Ainsi, l'équation de la tangente est $\underline{y = -1x + 1}$.

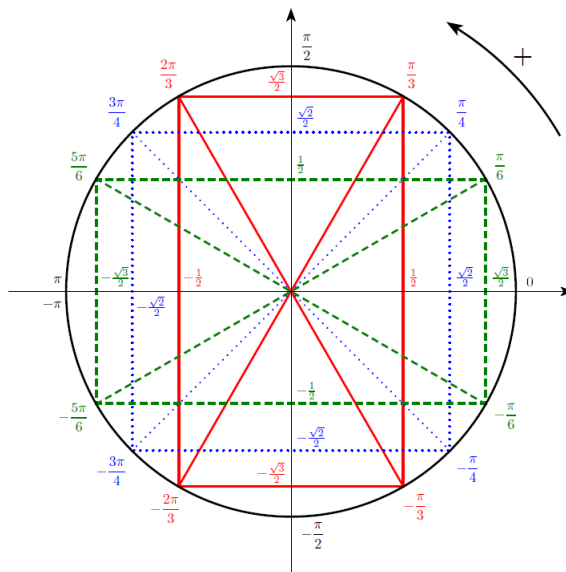
2.

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0	1	0	

6 Trigonométrie

1.
 - 1.1. $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$
 - 1.2. $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$
 - 1.3. $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$
 - 1.4. $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$
 - 1.5. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
 - 1.6. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
 - 1.7. $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$
2.
 - 2.1. $\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 - 2.2. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie



3.

$$3.1. \cos(x) = \frac{AC}{AB}$$

$$3.2. \sin(x) = \frac{BC}{AB}$$

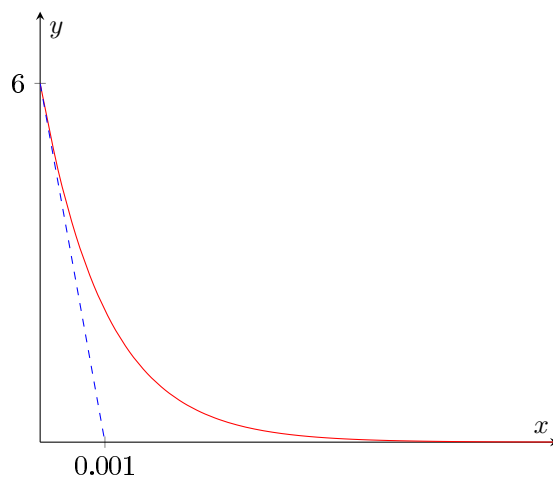
$$3.3. \tan(x) = \frac{BC}{AC}$$

7 Équations différentielles

1. (1) est une équation différentielle du 1^{er} ordre à coefficients constants avec second membre constant.

2. La solution est de la forme $y = A \exp(-x/0,001)$ avec A une constante qui dépend des conditions initiales.

3.



8 Géométrie

1. Un vecteur est défini par une norme, une direction et un sens.

Un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme vaut 1.

Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

Produit scalaire : $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \times \|\vec{v}_2\| \times \cos \theta$ avec $\theta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

Si le vecteur $\vec{v}_1$ a pour composantes $(v_{1x}; v_{1y})$ et le vecteur $\vec{v}_2$ a pour composantes $(v_{2x}; v_{2y})$ alors

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x} \times v_{2x} + v_{1y} \times v_{2y}$$

Norme d'un vecteur : $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$

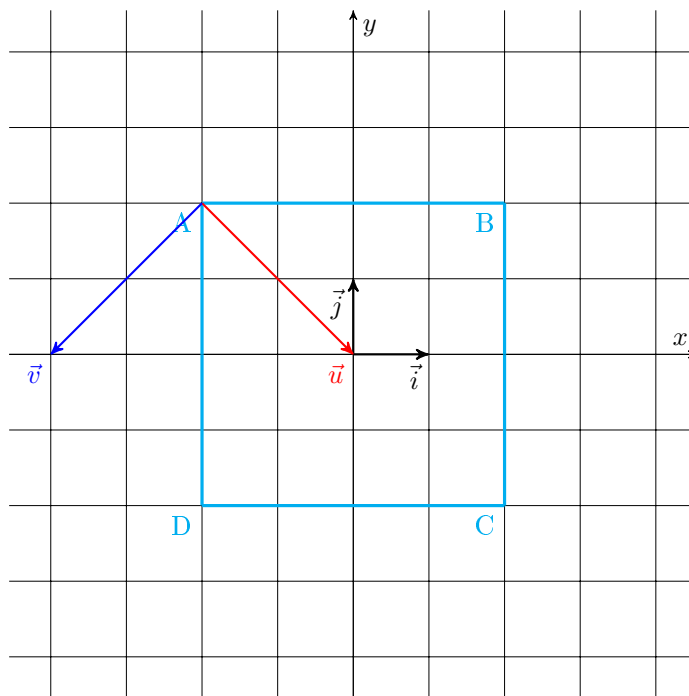
Si le vecteur $\vec{v}$ a pour composantes $(v_x; v_y)$ alors $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Projection d'un vecteur : Si le vecteur $\vec{v}$ a pour composantes $(v_x; v_y)$ dans la base $(\vec{u}_x; \vec{u}_y)$ alors $v_x = \vec{v} \cdot \vec{u}_x$

2.

2.1. Voir ci-dessous.

2.2. Voir ci-dessous.



2.3. $\vec{u}(2; -2)$, $\vec{v}(-2; -2)$ et $\overrightarrow{AD}(0, -4)$.

2.4. $\|\overrightarrow{AD}\| = 4$.

2.5. $\vec{w}(\|\vec{w}\| \cos(\alpha); \|\vec{w}\| \sin(\alpha)) \Rightarrow \vec{w}(1; 1)$.

Mathématiques

Exercice 1.

Techniques opératoires

1. Développer $A = (x - y^2)(x + y^2)(x^2 + y^4)$.

$$\begin{aligned} A &= (x - y^2)(x + y^2)(x^2 + y^4) \\ &= (x^2 + xy^2 - xy^2 - y^4)(x^2 + y^4) = (x^2 - y^4)(x^2 + y^4) \\ &= x^4 + x^2y^4 - x^2y^4 - y^8 = x^4 - y^8 \end{aligned}$$

On reconnaît à deux reprises la formule $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, la première fois avec $a = x$ et $b = y^2$ et la seconde fois avec $a = x^2$ et $b = y^4$.

2. Factoriser $B = (x + 1)(y^2 + 2) - y(2x + 2) - (x + 1)$.

En déduire que $B = 0$ si et seulement si $x = -1$ ou $y = 1$.

Avec $2x + 2 = 2(x + 1)$, on remarque que $(x + 1)$ est en facteur dans les 3 termes. On en déduit que

$$B = (x + 1)[(y^2 + 2) - 2y - 1] = (x + 1)[y^2 - 2y + 1] = (x + 1)(y - 1)^2$$

Un produit de deux facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul. Donc $B = (x + 1) \times (y - 1)^2$ vaut 0 si et seulement si $x + 1 = 0$ ou $(y - 1)^2 = 0$, ce qui équivaut à $x = -1$ ou $y = 1$.

3. (a) Simplifier l'expression de $C = \frac{\frac{x+2}{3}}{1 + \frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned} C &= \frac{\frac{x+2}{3}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x+2}{3}}{\frac{x+1}{x}} \\ &= \frac{x+2}{3} \times \frac{x}{x+1} = \frac{x(x+2)}{3(x+1)} \end{aligned}$$

- (b) En déduire, sans faire de calcul, une forme simplifiée de $D = \frac{\frac{\sqrt{t+1}+2}{3}}{1 + \frac{1}{\sqrt{t+1}}}$ et de

$$E = \frac{\frac{t+3}{3}}{1 + \frac{1}{t+1}}.$$

Pour D : il suffit de poser $x = \sqrt{t+1}$ pour retrouver l'expression de C . On en déduit que

$$D = \frac{\sqrt{t+1}(\sqrt{t+1}+2)}{3(\sqrt{t+1}+1)}$$

De même, en posant $x = t + 1$, on passe de l'expression de E à celle de C . On en déduit que

$$E = \frac{(t+1)(t+1+2)}{3(t+1+1)} = \frac{(t+1)(t+3)}{3(t+2)}$$

Exercice 2.**Equations**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\frac{x+1}{x-1} = a$ en fonction $a \in \mathbb{R}$.

Le quotient $\frac{x+1}{x-1}$ n'a de sens que si $x \neq 1$. On suppose donc $x \neq 1$ dans toute la suite.

Pour tout $x \neq 1$,

$$\frac{x+1}{x-1} = a \iff x+1 = a(x-1) = ax - a \iff (1-a)x = -a-1$$

Attention : on ne peut pas à ce stade diviser par $(1-a)$ sans réfléchir, parce que $(1-a)$ peut valoir 0. On étudie séparément le cas $a = 1$, qui donne $1-a = 0$, et les autres cas : $a \neq 1$.

- Si $a = 1$, alors $(1-a)x = -a-1$ s'écrit $0 = -2$ qui est absurde.

Ceci signifie que quand $a = 1$, l'équation $\frac{x+1}{x-1} = a$ n'a aucune solution x réelle.

- Si $a \neq 1$, alors

$$(1-a)x = -a-1 \iff x = \frac{-a-1}{1-a} = \frac{a+1}{a-1}$$

De plus, $\frac{a+1}{a-1} = \frac{(a-1)+2}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1} \neq 1$.

On conclut que quand $a \neq 1$, l'équation $\frac{x+1}{x-1} = a$ admet une unique solution réelle qui est

$$x = \frac{-a-1}{1-a} = \frac{a+1}{a-1}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $x^2 = 3x$.

Il est inutile (et peu efficace) de passer par le discriminant. Mieux vaut écrire

$$x^2 = 3x \iff x^2 - 3x = 0 \iff x(x-3) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul. Donc $x(x-3) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = 3$.

Conclusion : l'équation $x^2 = 3x$ admet deux solutions réelles qui sont 0 et 3.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

On reconnaît une équation polynomiale de degré 2. Utilisons le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = 7^2.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes.

$$\bullet x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+7}{4} = 3$$

$$\bullet x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$

Remarque : On peut en déduire la forme factorisée du trinôme $2x^2 - 5x - 3$, qui est

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x-3) \left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-3)(2x+1).$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

- Cette équation n'est pas une équation polynomiale. Néanmoins, on remarque que $e^{2x} = (e^x)^2$, et que $e^{2x} - 3e^x + 2 = (e^x)^2 - 3e^x + 2$.
- On commence donc par chercher les solutions de l'équation de degré 2 : $y^2 - 3y + 2 = 0$. On peut utiliser le discriminant, ou bien remarquer que $y = 1$ est une racine évidente, et par factorisation, obtenir $y^2 - 3y + 2 = (y - 1)(y - 2)$. On en déduit que $y^2 - 3y + 2 = 0$ équivaut à $y = 1$ ou $y = 2$.
- On sait maintenant que $(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$ équivaut à $e^x = 2$ ou $e^x = 1$.
L'équation $e^x = 2$ admet une unique solution réelle qui est $x = \ln(2)$. Et l'équation $e^x = 1$ admet une unique solution réelle qui est $x = \ln(1) = 0$.
On conclut que $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ admet exactement deux solutions réelles qui sont 0 et $\ln(2)$.

Exercice 3.

Inégalités

1. On suppose que $2 < x \leq 4$ et que $1 \leq y \leq 3$.

Donner les meilleurs encadrements possibles de $a = x - y$, $b = xy$ et $c = \frac{x}{y}$.

- Pour a :
 $1 \leq y \leq 3$ équivaut à $-3 \leq -y \leq -1$.
Par somme avec $2 < x \leq 4$, on en déduit que $2 - 3 < x - y \leq 4 - 1$, c'est à dire $-1 < a \leq 3$.
- Pour b :
 $x > 1 > 0$ et $y \geq 1 > 0$ donnent $xy > 1$. De même, $0 \leq x \leq 4$ et $0 \leq y \leq 3$ donnent $xy \leq 12$.
Donc $1 < b \leq 12$.

Remarque : les calculs ci-dessus utilisent la positivité de x et y . Si on avait $-2 \leq x$ et $3 \leq y$, on ne pourrait pas en déduire que $-6 \leq xy$ (on pourrait avoir $x = -1$ et $y = 12$ par exemple).

- Pour c :
De $0 < 1 \leq y$ on peut déduire $\frac{1}{y} \leq 1$, et de $0 < y \leq 3$ on peut déduire $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{3}$.
Comme dans la question précédente, de $0 < 2 < x \leq 4$ et $0 < \frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq 1$ on peut déduire par produit que $\frac{2}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{4}{1} = 4$.

2. Déterminer l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'inéquation $\frac{x+2}{x+1} \leq 1$.

On commence par remarquer que le quotient $\frac{x+2}{x+1}$ n'a de sens que si $x \neq -1$. On supposera donc $x \neq -1$ dans toute la suite.

Remarque : Commencer par essayer de multiplier des deux côtés de l'inégalité par $(x+1)$ n'est pas une bonne idée. En effet, on ne connaît pas le signe de $x+1$. Si on veut mettre en oeuvre cette méthode, il est nécessaire de distinguer les deux situations possibles : $x+1 > 0$ et $x+1 < 0$, et de résoudre l'inéquation dans chacun de ces 2 cas.

Il est préférable de se ramener à une étude de signe.

$$\frac{x+2}{x+1} \leq 1 \iff \frac{x+2}{x+1} - 1 \leq 0 \iff \frac{x+2-(x+1)}{x+1} \leq 0 \iff \frac{1}{x+1} \leq 0$$

On sait que, quand $x \neq -1$, $\frac{1}{x+1}$ et $x+1$ ont le même signe. Quand $x \neq -1$, on a donc $\frac{1}{x+1} \leq 0 \iff x+1 \leq 0$.

On conclut que l'ensemble des solutions de $\frac{x+2}{x+1} \leq 1$ est $x < -1$.

3. (a) Déterminer l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'inéquation $(x-1)^2 \geq 9$.

• Première méthode : par opérations sur les inégalités

On sait que si a et b sont deux réels positifs, alors $a \leq b$ équivaut à $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$. Pour $a = (x-1)^2$ et $b = 9$ par exemple (qui sont bien positifs), on obtient

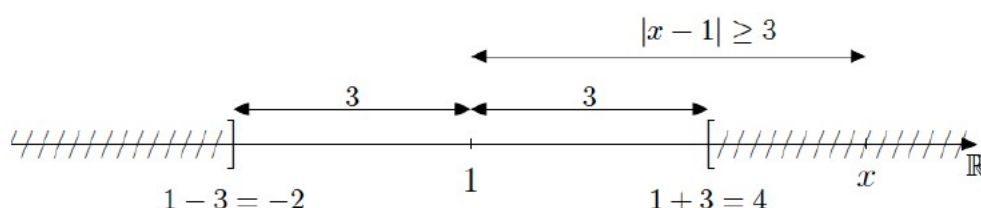
$$(x-1)^2 \geq 9 \iff \sqrt{(x-1)^2} \geq \sqrt{9} = 3$$

Attention : $\sqrt{(x-1)^2} \neq x-1$ en général ! On peut par contre utiliser la valeur absolue pour écrire $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$. Ainsi, $(x-1)^2 \geq 9$ équivaut à $|x-1| \geq 3$.

On sait que $|y| \geq 3$ équivaut à $y \in]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$, c'est à dire $y \leq -3$ ou $y \geq 3$. On en déduit que $|x-1| \geq 3$ équivaut à $x-1 \geq 3$ ou $x-1 \leq -3$, c'est à dire $x \geq 4$ ou $x \leq -2$.

On conclut que l'ensemble des solutions de $(x-1)^2 \geq 9$ est $] -\infty; -2] \cup [4; +\infty[$.

Remarque : On pourra utilement se souvenir de l'interprétation de la valeur absolue en terme de distance.



• Deuxième méthode : en se ramenant à une étude de signe

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1, \text{ et } (x-1)^2 \geq 9 \text{ équivaut à } x^2 - 2x - 8 \geq 0.$$

A l'aide du discriminant on calcule les deux racines de l'équation $x^2 - 2x - 8 = 0$, et on factorise le trinôme : $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$.

On sait que le trinôme a pour signe le signe du coefficient dominant ($a = 1$ ici) partout sauf entre les racines. On en déduit que $(x+2)(x-4) \geq 0$ si et seulement si $x \leq -2$ ou $x \geq 4$.

(b) En déduire l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'inéquation $x \geq \sqrt{2x+8}$.

On commence par remarquer que $\sqrt{2x+8}$ n'a de sens que si $2x+8 \geq 0$, ce qui équivaut à $2x \geq -8$, ou encore à $x \geq -4$. On supposera donc $x \geq -4$ dans toute la suite.

Pour $x \geq -4$, on a $\sqrt{2x+8} \geq 0$. Donc toutes les solutions de $x \geq \sqrt{2x+8}$ sont des réels positifs. On supposera donc $x \geq 0$ dans toute la suite.

On sait que si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, alors $a \geq b$ équivaut à $a^2 \geq b^2$. Pour $a = x$ et $b = \sqrt{2x+8}$ qui sont bien positifs, on obtient

$$x \geq \sqrt{2x+8} \iff x^2 \geq 2x+8 \iff x^2 - 2x - 8 \geq 0$$

On reconnaît le trinôme étudié dans la question précédente. On a montré que $x^2 - 2x - 8 \geq 0$ si et seulement si $x \leq -2$ ou $x \geq 4$.

On conclut que l'ensemble S des solutions de $x \geq \sqrt{2x+8}$ est constitué de l'ensemble des x réels positifs tels que $x \leq -2$ ou $x \geq 4$, c'est à dire $S = [4; +\infty[$.

4. Déterminer le signe de $f(x) = x(|x| - 1)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

Le signe d'un produit s'étudie à l'aide du signe de chacun des facteurs.

Le signe de x est positif quand x est positif, et négatif quand il est négatif.

Étudions le signe de $|x| - 1$.

On a $|x| - 1 \leq 0$ si et seulement si $|x| \leq 1$, ce qui équivaut à $x \in [-1; 1]$.

On en déduit que

- $|x| - 1$ est négatif si $x \in [-1; 1]$,
- et $|x| - 1$ est positif si $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

On peut s'aider d'un tableau de signes pour conclure.

- Si $x \leq -1$, alors $f(x)$ est négatif,
- si $-1 \leq x \leq 0$, alors $f(x)$ est positif,
- si $0 \leq x \leq 1$, alors $f(x)$ est négatif,
- et si $x \geq 1$, alors $f(x)$ est positif.

Exercice 4.

Puissances, logarithme et exponentielle

1. (a) Exprimer sous forme de produit d'une puissance de a avec une puissance de b la quantité

$$A = \frac{(ab)^2 a^3 b^{-4}}{a^2 b^2 (ab)^{-3}}.$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{(ab)^2 a^3 b^{-4}}{a^2 b^2 (ab)^{-3}} = \frac{a^2 b^2 a^3 b^{-4}}{a^2 b^2 a^{-3} b^{-3}} = \frac{a^{2+3} b^{2-4}}{a^{2-3} b^{2-3}} \\ &= \frac{a^5 b^{-2}}{a^{-1} b^{-1}} = a^5 b^{-2} a^1 b^1 = a^6 b^{-1} = \frac{a^6}{b} \end{aligned}$$

(b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et les relations $u_{n+1} = u_n^3$ pour tout $n \geq 0$.

i. Calculer u_1 et u_2 .

Par définition, $u_1 = (u_0)^3 = 2^3 = 8$.

De même, $u_2 = (u_1)^3 = 8^3 = 2^9 = 512$.

ii. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 2^{3^n}$.

- Initialisation : pour $n = 0$

On a $u_0 = 2$, et $3^0 = 1$, qui donne $2^{3^0} = 2^1 = 2$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité : Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = 2^{3^k}$.

Alors, par définition de la suite, $u_{k+1} = (u_k)^3 = (2^{3^k})^3$.

On sait que $(2^x)^3 = 2^{x \times 3} = 2^{3x}$. Pour $x = 3^k$, qui donne $3x = 3^{k+1}$, on obtient $u_{k+1} = 2^{3^k \times 3} = 2^{3^{k+1}}$.

Ainsi la propriété est vérifiée au rang $(k+1)$.

Ceci prouve que la propriété est héréditaire.

- Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

(c) Simplifier $B = \frac{\sqrt{10^6}}{1000 + \sqrt{10^2}}$.

$$B = \frac{\sqrt{10^6}}{1000 + \sqrt{10^2}} = \frac{10^3}{1000 + 10^1} = \frac{1000}{1010} = \frac{100}{101}$$

2. (a) Simplifier $C = \ln(e^3) + \ln(\sqrt{e})$.

$$\begin{aligned} C &= \ln(e^3) + \ln(\sqrt{e}) \\ &= 3\ln(e) + \frac{1}{2}\ln(e) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

(b) Simplifier $D = e^{-\ln(2)+\ln(4)}$.

$$D = e^{-\ln(2)+\ln(4)} = e^{\ln(4/2)} = e^{\ln(2)} = 2$$

Autre possibilité :

$$D = e^{-\ln(2)+\ln(4)} = \frac{e^{\ln(4)}}{e^{\ln(2)}} = \frac{4}{2} = 2$$

3. Résoudre l'inéquation $\ln(1-x) \leq 0$.

On sait que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, et que $\ln(1) = 0$. En particulier $\ln(t) \leq 0$ équivaut à $t \in]0; 1]$.

On en déduit que $\ln(1-x) \leq 0$ équivaut à $0 < 1-x \leq 1$.

D'une part $0 < 1-x$ équivaut à $x < 1$, et d'autre part $1-x \leq 1$ équivaut à $x \geq 0$.

On en déduit que $\ln(1-x) \leq 0$ équivaut à $x \in [0; 1[$.

Exercice 5.

Etudes de fonctions

On considère la fonction f définie par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. Déterminer l'ensemble I des réels x tels que $f(x)$ existe.

On sait que la fonction logarithme népérien $\ln$ est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On en déduit que f est définie sur l'ensemble des x réels tels que $x+1 > 0$, c'est à dire sur l'intervalle $] -1; +\infty[$.

2. Exprimer la dérivée de f et étudier son signe.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -1; +\infty[$, et sa dérivée est

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) - 1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

Le signe d'un quotient s'étudie en étudiant le signe du numérateur et celui du dénominateur. On peut s'aider d'un tableau de signes. On trouve que

- Sur l'intervalle $] -1; 0]$, on a $f'(x) \leq 0$, et f est décroissante.
- Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, on a $f'(x) \geq 0$ et f est croissante.

3. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine.

On sait que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty$.

- Limite en -1 (à droite) :

On a $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow -1^+} -\ln(1+x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x - \ln(1+x) = +\infty$.

- Limite en $+\infty$:

On a à la fois $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$. La limite de f en $+\infty$ est donc dans un premier temps indéterminée.

Pour lever l'indétermination, on met en facteur le terme "dominant", ici quand $x \rightarrow +\infty$:

$$f(x) = x - \ln(x+1) = x \times \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{x}\right)$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. On peut à ce stade envisager au moins deux rédactions.

- Première possibilité : Ecrivons

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, qui donne aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 1} \ln(t) = 0$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0 + 0 \times 0 = 0$.

Finalement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$, et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Autre possibilité : Ecrivons

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{x+1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

On a d'une part $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$,

et, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty$, on a d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$.

Par produit, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$.

Comme plus haut, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

4. Construire le tableau de variation de f .

Le calcul donne $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$.

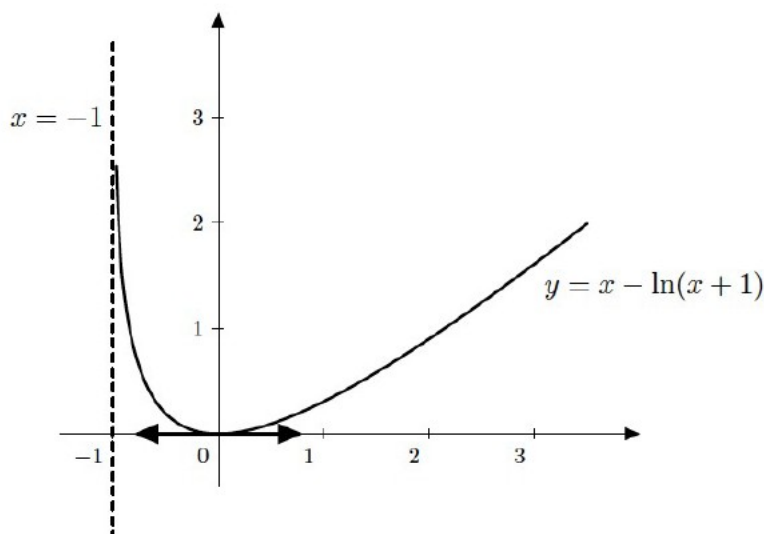
x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	$-$	0 $+$
$f(x)$	$\parallel$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$

5. Donner l'équation d'une asymptote à la courbe de f , et préciser les points où la tangente à la courbe de f est parallèle à l'axe des abscisses.

La courbe de f admet une asymptote verticale à droite en $x = -1$, qui est la droite d'équation $x = -1$.

La tangente à la courbe de f est parallèle à l'axe des abscisses là où la dérivée de f s'annule. Comme $f'(0) = 0$, la courbe de f admet une tangente au point M de coordonnées $(0, f(0)) = (0, 0)$, qui est la droite d'équation $y = f(0) + f'(0)(x-0) = 0$. Autrement dit, l'axe des abscisses est tangent en l'origine du repère à la courbe de f .

6. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe de f , l'asymptote et la tangente horizontale.



Exercice 6.

Intégration

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction f définie par $f(x) = 2x^4 - x^2 + \frac{1}{x^2}$.

On sait que $(x^5)' = 5x^4$. On en déduit que $(\frac{2}{5}x^5)' = \frac{2}{5} \times 5x^4 = 2x^4$.

De même, $(x^3)' = 3x^2$, et $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$.

Enfin, de $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$, on déduit que $(-\frac{1}{x})' = \frac{1}{x^2}$.

Donc la fonction F définie par $F(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x}$ admet pour dérivée $F'(x) = 2x^4 - x^2 + \frac{1}{x^2} = f(x)$. Autrement dit, F est une primitive de f .

Remarque : Comme vous le savez, une fonction f continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives. Les autres primitives de f sur $I = \mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $F_\alpha : x \mapsto \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + \alpha$, pour tous les $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par $g(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$ qui s'annule en $x = 0$.

On commence par déterminer une primitive de g sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$. On en déduira ensuite celle qui s'annule en $x = 0$.

On sait que si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $f(x) = e^{u(x)}$ est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$. On remarque que $g(x)$ est de la forme $u'(x)e^{u(x)}$, pour $\boxed{u(x) = \sin(x)}$. Ainsi, la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = e^{\sin(x)}$ admet pour dérivée $G'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$, et G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Calculons $G(0)$. On trouve $G(0) = e^{\sin(0)} = e^0 = 1$. La fonction G ne s'annule donc pas en 0. On sait que toutes les autres primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $G_\alpha : x \mapsto e^{\sin(x)} + \alpha$, pour tous les $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche donc une valeur de α pour laquelle $G_\alpha(0) = 0$. Le calcul donne $G_\alpha(0) = e^0 + \alpha = 1 + \alpha$. Pour avoir $G_\alpha(0) = 0$, il est donc nécessaire et suffisant de prendre $\alpha = -1$.

Conclusion : La fonction G_{-1} , définie sur $\mathbb{R}$ par $G_{-1}(x) = e^{\sin(x)} - 1$ est la primitive de g qui vérifie $G_{-1}(0) = 0$.

3. Calculer la valeur de $I = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$.

On sait que si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, et si F est une primitive de f sur cet intervalle, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Notons f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$, et cherchons une primitive F de f .

On sait également que si u est une fonction à valeurs strictement positives sur un intervalle I , alors la fonction h définie par $h(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I , et de dérivée $h'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

On remarque que $f(x)$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$, pour $u(x) = x^2 + x + 1$. Pour tout x appartenant à $I = [0; 1]$, on a $u(x) = x^2 + x + 1 \geq 0 + 0 + 1 > 0$. Ainsi, $F(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ est l'expression d'une fonction F qui est bien définie et dérivable sur $[0; 1]$, et dont la dérivée est $F'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} = f(x)$.

Finalement, $I = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = F(1) - F(0) = \ln(1^2+1+1) - \ln(0^2+0+1) = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3)$.

Exercice 7.

Réurrences et suites

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 8 \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 8$.

(a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Par définition, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 8 \\ &= (2u_n - 8) - 8 = 2u_n - 16 \\ &= 2 \times (u_n - 8) = 2v_n \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.

(b) Exprimer v_n en fonction de n .

On en déduit que pour tout $n \geq 0$, $v_n = v_0 \times 2^n$.

Comme $v_0 = u_0 - 8 = 1 - 8 = -7$, on a $v_n = (-7) \times 2^n$ pour tout $n \geq 0$.

(c) En déduire que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 8 - 7 \times 2^n$.

Pour tout $n \geq 0$, $u_n = v_n + 8 = -7 \times 2^n + 8$.

(d) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

On peut procéder de différentes façons. Par exemple :

Pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = [8 - 7 \times 2^{n+1}] - [8 - 7 \times 2^n] = 7 \times 2^n - 7 \times 2^{n+1} = 7 \times 2^n \times (1 - 2) = -7 \times 2^n < 0$. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

(e) Calculer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} -7 \times 2^n = -\infty$, et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (8 - 7 \times 2^n) = -\infty$.

(f) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle majorée, minorée, bornée ?

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas minorée, et elle n'est donc pas bornée.

Par contre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 8 - 7 \times 2^n \leq 8$. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée (par 8 par exemple).

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{3 - u_n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

(a) En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n < 1$.

- Il faut initialiser la récurrence à $n = 1$. Calculons donc u_1 .

$$u_1 = \frac{u_0 + 1}{3 - u_0} = \frac{1}{3}.$$

On a bien $0 < u_1 < 1$ et la propriété est vraie au rang 1.

- Supposons qu'il existe $k \geq 1$ tel que $0 < u_k < 1$.

Alors d'une part $1 < u_k + 1 < 2$,

et d'autre part $-1 < -u_k < 0$ et donc $2 < 3 - u_k < 3$, qui donne $\frac{1}{3} < \frac{1}{3 - u_k} < \frac{1}{2}$.

Par produit, on en déduit que $\frac{1}{3} < \frac{u_k + 1}{3 - u_k} < 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Donc la propriété est vraie au rang $k + 1$.

Ceci prouve que la propriété est héréditaire.

- Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

(b) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} , puis exprimer v_{n+1} en fonction de u_n .

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{u_n + 1}{3 - u_n} - 1} = \frac{1}{\frac{u_n + 1 - (3 - u_n)}{3 - u_n}} = \frac{3 - u_n}{u_n + 1 - (3 - u_n)} = \frac{3 - u_n}{2u_n - 2}.$$

(c) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{2}$.

On doit montrer que pour tout $n \geq 0$, $v_{n+1} = v_n - \frac{1}{2}$.

On peut par exemple calculer $v_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2u_n - 2} - \frac{u_n - 1}{2u_n - 2} = \frac{3 - u_n}{2u_n - 2} = v_{n+1}$.

On peut aussi écrire

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3 - u_n}{2u_n - 2} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{3 - u_n}{2u_n - 2} - \frac{2}{2u_n - 2} = \frac{1 - u_n}{2u_n - 2} = -\frac{1}{2}$$

Qu'on utilise une méthode ou une autre, on conclut que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{2}$.

(d) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{2}$, on a pour tout $n \geq 0$,

$$v_n = v_0 + n \times \left(-\frac{1}{2}\right) = v_0 - \frac{n}{2}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{n}{2} = -\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Par ailleurs, $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ équivaut à $\frac{1}{v_n} = u_n - 1$, et donc à $u_n = 1 + \frac{1}{v_n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} = 0$, et on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

3. Exprimer, en fonction de n , sans symbole $\sum$ la valeur de $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k}$.

On peut rédiger ce calcul de différentes façons, en fonction des propriétés connues du symbole $\sum$. A minima, on peut écrire :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^2} \times \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right] \\ &= \frac{1}{2^2} \times \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right] \end{aligned}$$

La formule, valable pour tout $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \dots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

donne, pour $q = \frac{1}{2}$ et $k = n - 2$,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2^2} \times \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{On conclut que } S = \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}.$$

Exercice 8.

Trigonométrie

1. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

L'énoncé nous invite à utiliser la formule de trigonométrie $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ et les valeurs des cosinus et sinus des angles usuels.

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

On procède de même pour le sinus, à l'aide de la formule $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$:

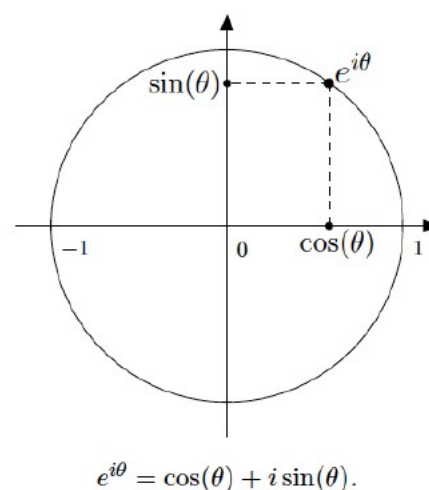
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

2. (a) Déterminer les solutions $x \in [-\pi; \pi]$ de $\sin(x) = 0$.

On utilise le cercle trigonométrique.

On voit que $\sin(x) = 0$ si et seulement si $x \equiv 0 [2\pi]$ ou $x \equiv \pi [2\pi]$.

On en déduit que les solutions $x \in [-\pi; \pi]$ de $\sin(x) = 0$ sont $x = -\pi$, $x = 0$ et $x = \pi$.



- (b) Déterminer les solutions $x \in [-\pi; \pi]$ de $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

On utilise à nouveau le cercle trigonométrique.

On voit que $\cos(x) = \frac{1}{2}$ si et seulement si $x \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

On en déduit que les solutions $x \in [-\pi; \pi]$ de $\cos(x) = \frac{1}{2}$ sont $x = -\frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{\pi}{3}$.

- (c) En utilisant une formule de trigonométrie, factoriser $A = \sin(x) - \sin(2x)$, puis résoudre l'équation $\sin(x) - \sin(2x) = 0$ dans $[-\pi; \pi]$.

- On sait que $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$.
On en déduit que $A = \sin(x) - 2 \sin(x) \cos(x) = \sin(x) \times [1 - 2 \cos(x)]$.
- On sait qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.
On en déduit que $A = 0$ si et seulement si $\sin(x) = 0$ ou $1 - 2 \cos(x) = 0$, c'est à dire si et seulement si $\sin(x) = 0$ ou $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
- Grâce aux questions précédentes, on en déduit que $A = 0$ si et seulement si $x \in \left\{-\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \pi\right\}$.