

EXERCICES

Les exercices 1 et 2 concernent les élèves ayant suivi l'option mathématiques expertes en classe de terminale. Si certains étudiants n'ayant pas suivi cette option souhaitent se mettre à niveau avant la rentrée sur le thème des nombres complexes et des matrices, voici des liens vers des vidéos explicatives.

<https://youtu.be/ABo2m52oEYw>

<https://youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCapcDUDG8urAmLovJBga4pu4>

EXERCICE 1 Nombres complexes I

1. Démontrer, en utilisant les parties réelles et imaginaires, que pour tous complexes a et b on a :

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2).$$

2. Redémontrer la même égalité mais sans utiliser les parties réelles et imaginaires.

EXERCICE 2 Nombres complexes II

1. Sachant que $7^2 + 24^2 = 25^2$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$$25z^2 - 14z + 25 = 0.$$

2. Vérifier par un calcul direct que les solutions de cette équation sont de module 1.

EXERCICE 3 Calculs algébriques

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= -2 \\ u_{n+1} &= \frac{3}{4}u_n - 1 \end{cases}$$

On définit la suite (v_n) par

$$v_n = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

1. Calculer v_0 et v_1 .
2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
3. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire une expression de u_n en fonction de n .
4. Calculer $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ puis $s'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

EXERCICE 4 Polynôme du second degré

Soit le polynôme P défini par $P(x) = x^4 + bx^2 + c$ où b et c sont des réels quelconques. On note $\Delta = b^2 - 4c$.

1. On suppose $\Delta \geq 0$. Factoriser P sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré.
2. On suppose $\Delta < 0$. On a alors $c > 0$ et $b < 2\sqrt{c}$. Écrire P comme une différence de deux carrés puis en déduire une factorisation de P par deux polynômes du second degré.

EXERCICE 5 Exponentielle et racine carrée

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vérifiant la formule

$$f(x) = \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}.$$

1. Déterminer l'ensemble E des x pour lesquels $f(x)$ a un sens.
2. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2}.$$

En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer sa dérivée, en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.