

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

1 Suites arithmétiques et géométriques

Suites arithmétiques

Définition Soit u une suite et r un réel.

La suite u est **arithmétique** de **raison** r lorsque pour tout entier n

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Interprétation Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute r à chaque fois :

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \cdots u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

Forme explicite Soit u une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . Alors pour tout entier naturel n

$$u_n = u_0 + nr$$

Sens de variation Soit u une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, la suite u est croissante.
- Si $r = 0$, la suite u est constante, égale à u_0 .
- Si $r < 0$, la suite u est décroissante.

Somme des entiers Soit n un entier naturel. La somme des entiers de 1 à n est égale à

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme des termes Soit u une suite arithmétique de raison r . La somme des termes de la suite u du rang 0 au rang n est égale à

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \underbrace{(n+1)}_{\text{nombre de termes}} \times \frac{\overbrace{u_0}^{\text{premier terme}} + \overbrace{u_n}^{\text{dernier terme}}}{2}$$

Suites géométriques

Définition Soit v une suite et q un réel non-nul.

La suite v est **géométrique** de **raison** q lorsque pour tout entier n

$$v_{n+1} = q \times v_n$$

Interprétation Pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par q à chaque fois :

$$v_0 \xrightarrow{\times q} v_1 \xrightarrow{\times q} v_2 \cdots v_n \xrightarrow{\times q} v_{n+1}$$

Forme explicite Soit v une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0 . Alors pour tout entier naturel n

$$v_n = v_0 \times q^n$$

Sens de variation Soit v une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0 .

- Si $q > 1$ et $v_0 > 0$, la suite v est croissante.
- Si $q > 1$ et $v_0 < 0$, la suite v est décroissante.
- Si $q \in]0; 1[$ et $v_0 > 0$, la suite v est décroissante.
- Si $q \in]0; 1[$ et $v_0 < 0$, la suite v est croissante.
- Si $q = 1$, la suite v est constante, égale à v_0 .
- Si $q < 0$, la suite v n'est pas monotone.

Somme des puissances Soient n un entier naturel et q un réel différent de 1. La somme des puissances de q^0 à q^n est égale à

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Somme des termes Soit v une suite géométrique de raison q différente de 1. La somme des termes de la suite v du rang 0 au rang n est égale à

$$\sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = \underbrace{v_0}_{\text{premier terme}} \times \frac{1 - \overbrace{q^{n+1}}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \underbrace{q}_{\text{raison}}}$$

2 Factorielles et coefficients binomiaux

2.1 Factorielles

Pour tout entier $n \geq 1$ la **factorielle de n** , notée $n!$ (on dit **factorielle n**) est l'entier défini par :

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n.$$

On pose de plus $0! = 1$.

Exemples : $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$; $10! = 3\,628\,800$.

2.2 Coefficients binomiaux

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$.

On définit le **coefficient binomial k parmi n** , noté $\binom{n}{k}$, par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}.$$

Les coefficients binomiaux vérifient les propriétés suivantes :

$$1. \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

$$2. \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

$$3. \quad \text{Si } 0 \leq k+1 \leq n \text{ alors } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Le tableau ci-contre, appelé **triangle de Pascal**, donne les valeurs des entiers $\binom{n}{k}$ pour $0 \leq k \leq n \leq 5$. Ce tableau est un excellent moyen mnémotechnique pour retrouver rapidement les propriétés énoncées ci-dessus.

Par exemple, $\binom{4}{2} = 6$; $\binom{4}{3} = 4$;

$$\binom{5}{3} = 10 = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}.$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

2.3 Formule du binôme de Newton

Cette notion peut être nouvelle, elle sera revue en début d'année.

Soient a et b deux complexes (ou réels) et n un entier naturel alors

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$

formule qui s'écrit encore :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

En particulier, on retrouve pour $n=2$ et $n=3$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{et} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ba^2 + b^3.$$

3 Polynôme du second degré

Soient a, b et c trois complexes avec $a \neq 0$. Posons $P(z) = az^2 + bz + c$.

Alors $P(z)$ peut s'écrire sous la **forme canonique** de la façon suivante :

$$P(z) = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \quad \text{où} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Si a, b et c sont des réels, alors $P(z)$ admet :

- un **minimum** en $-\frac{b}{2a}$ **ssi** $a > 0$ ($z \in \mathbb{R}$);
- un **maximum** en $-\frac{b}{2a}$ **ssi** $a < 0$ ($z \in \mathbb{R}$);
- **deux racines réelles** distinctes $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ **ssi** $\Delta > 0$;
- une **racine réelle double** $-\frac{b}{2a}$ **ssi** $\Delta = 0$;
- **aucune racine réelle** **ssi** $\Delta < 0$.

4 Valeur absolue et racine carrée

4.1 Valeur absolue

Par définition, si x est un réel alors on définit la **valeur absolue** de x , notée $|x|$ par $|x| = \max\{x, -x\}$, c'est-à-dire la plus grande des deux valeurs entre x et $-x$. On a donc $|x| \geq 0$ et $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Pour tous réels x et y la valeur absolue vérifie :

1. $|xy| = |x||y|$ et $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$.
2. $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalités dites **triangulaires**).

Si A est un réel positif alors on a les équivalences :

1. $|x| \leq A \iff -A \leq x \leq A \iff (-x \leq A \text{ et } x \leq A)$.
2. $|x| \geq A \iff (x \leq -A \text{ ou } x \geq A)$.

La **fonction valeur absolue** que l'on peut noter **abs** est définie sur $\mathbb{R}$, cela s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \text{abs} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \text{abs}(x) \end{aligned}$$

4.2 Racine carrée

Soit a un réel positif.

Le **racine carrée de a** , notée $\sqrt{a}$, est l'unique réel positif dont le carré vaut a . On a donc, pour tout réel x :

$$x = \sqrt{a} \iff \begin{cases} x^2 = a \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x^2 = a \iff (x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}). \quad \text{De plus} \quad \sqrt{x^2} = |x|.$$

Attention, $(x = \sqrt{a}) \iff (x^2 = a)$ est faux !

La **fonction racine carrée** que l'on peut noter $\sqrt{}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, cela s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \sqrt{} : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

5 Trigonométrie

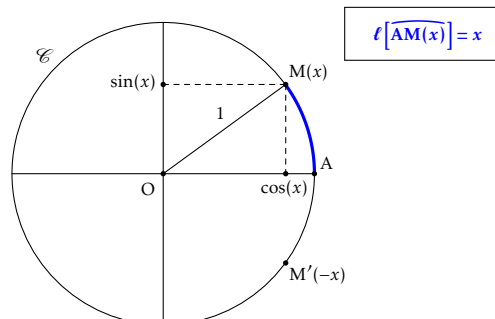
5.1 Cosinus et sinus d'un réel

Le plan, orienté dans le sens trigonométrique usuel, est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$ d'origine O.

A est le point de coordonnées (1, 0).

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1 (cercle trigonométrique).

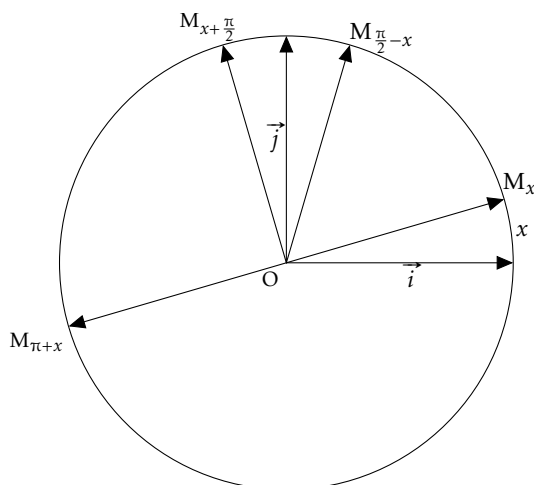
Pour tout réel x on note $M(x)$ le point de $\mathcal{C}$ tel que la longueur algébrique de l'arc $\widehat{AM(x)}$ est x . Alors, le cosinus et le sinus de x , notés $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont les coordonnées de $M(x)$ dans le repère $\mathcal{R}$.



Pour tout réel x : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

En exploitant les propriétés des symétries par rapport aux axes ou aux « diagonales » du repère $\mathcal{R}$, on peut démontrer que :

$$\begin{array}{llll} \cos(\pi - x) = -\cos(x), & \cos(\pi + x) = -\cos(x), & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x), & \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x), & \sin(\pi + x) = -\sin(x), & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \end{array}$$



Enfin, on a peut démontrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad ; \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

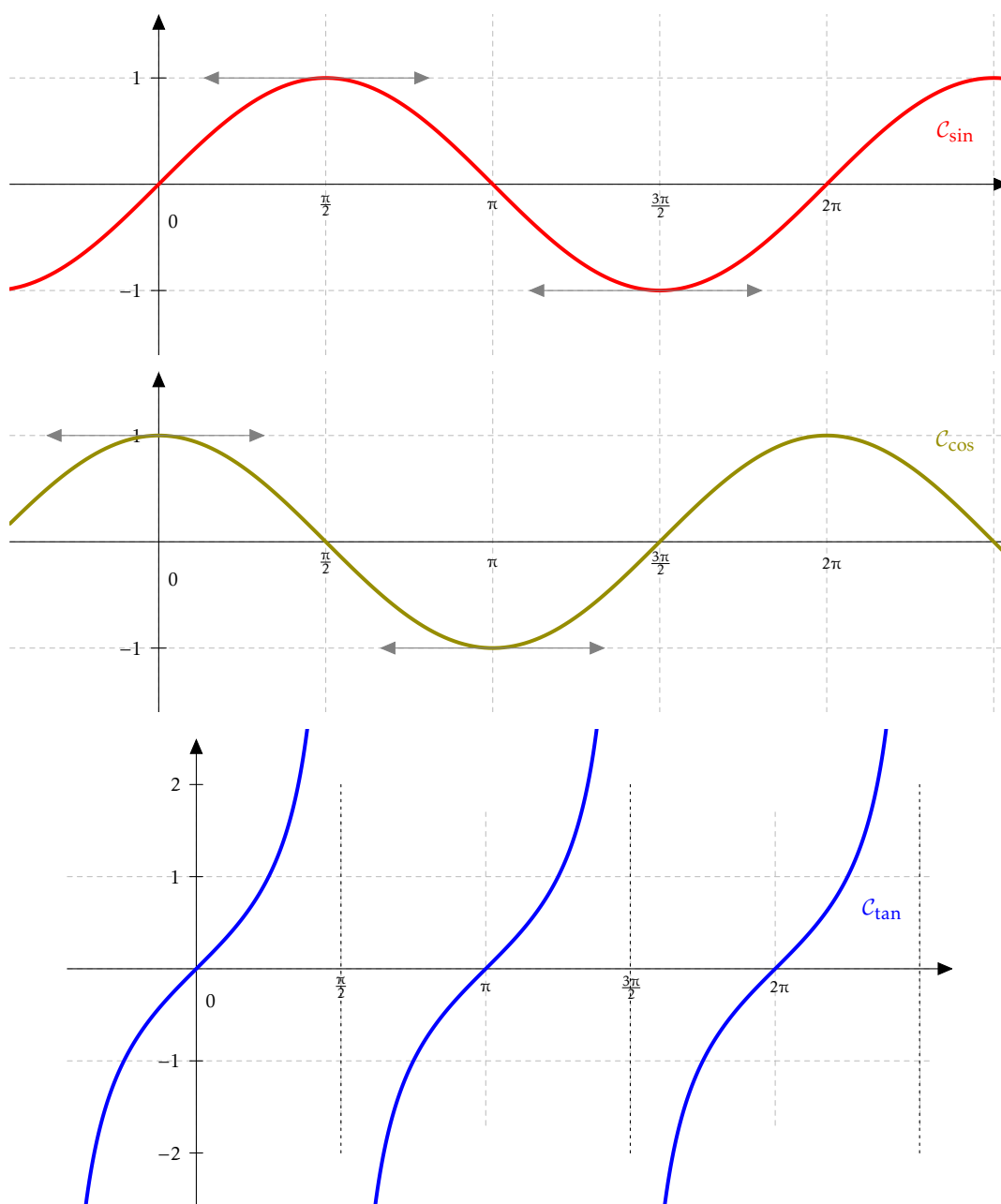
5.2 Tangente d'un réel

Soit x un réel tel que $x + \frac{\pi}{2}$ n'est pas un multiple de π (donc ici $x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$).

La tangente de x est le réel noté $\tan(x)$ tel que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On a $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

5.3 Valeurs particulières et courbes représentatives

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$



Courbes représentatives des fonctions sinus, cosinus et tangente.

6 Fonctions logarithme népérien et exponentielle

6.1 Fonction exponentielle

On note $\exp$ la **fonction exponentielle**, elle est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$, ce qui s'écrit :

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

et on pose $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \exp(x)$.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

2. $e^0 = 1$.

3. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{a+b} = e^a \times e^b$.

4. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

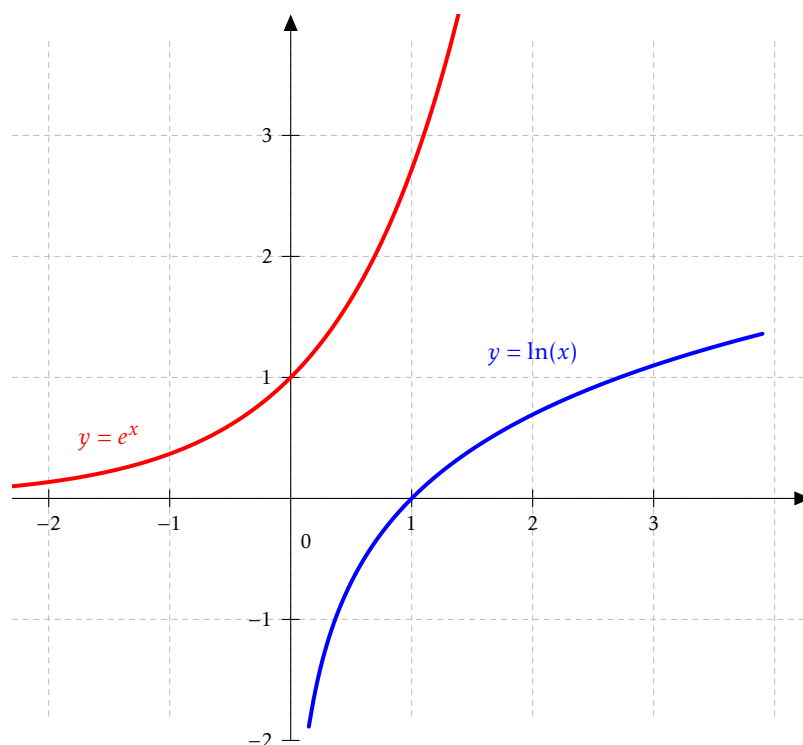
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$.

8. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (conséquence du 9. ci-dessous ; nombre dérivé $\exp'(0) = 1$).

9. La fonction $\exp$ est continue et sur $\mathbb{R}$ et de plus dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = e^x.$$

10. La tangente T au point d'abscisse 0 à la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ a pour équation $y = x + 1$.



Courbe représentative de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien

6.2 Fonction logarithme népérien

On note **ln** la fonction ¹ **logarithme népérien** et $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

De plus :

1. La fonction $\ln$ est la primitive de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ qui vaut 0 en 1.
2. $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

3. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. La fonction $\ln$ est la fonction réciproque de la fonction exponentielle, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{\ln x} = x \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^y) = y$$

5. $\forall x \in]0; 1[, \ln(x) < 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[, \ln(x) > 0$.

6. $\boxed{\ln(1) = 0}$ et $\boxed{\ln(e) = 1}$.

7. $\boxed{\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)}$ donc $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(a^n) = n \ln(a)}$.

8. $\boxed{\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$ donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.

12. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

13. La tangente T au point d'abscisse 1 à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ a pour équation $y = x - 1$.

1. Ne pas confondre $\ln$ avec la fonction $\log$ qui est le logarithme décimal « de la physique » où $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

7 Dérivation

7.1 Dérivées usuelles

Intervalle I contenant x_0	Fonction f	Nombre dérivé de f en x_0
$\mathbb{R}$	$x \mapsto c$ (où c est fixé)	0
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x$	1
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x^n$ où $n \geq 1$	nx_0^{n-1}
$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x_0^2}$
$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où $n \geq 1$	$-\frac{n}{x_0^{n+1}}$
$]0; +\infty[$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$
$]0; +\infty[$	$x \mapsto \ln(x)$	$\frac{1}{x_0}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$	$\exp(x_0)$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(x)$	$-\sin(x_0)$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$	$\cos(x_0)$

7.2 Opérations et dérivation

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que les membres des égalités ci-dessous ont un sens. Alors ($n \in \mathbb{N}$) :

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \times v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

$$(\exp(u))' = u' \times \exp(u)$$

$$(\sin(u))' = u' \times \cos(u)$$

$$(\cos(u))' = u' \times (-\sin(u))$$