

MATHÉMATIQUES – TEST DE RENTRÉE

La calculatrice est autorisée. Durée : 2h.

1^{er} problème

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 - 4x^2 - x + 2.$$

- a) Donner, en justifiant le tableau de variations de g (on ne cherchera pas à calculer les valeurs exactes des extremums de g).
- b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0; 2]$.
- c) En déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur l'intervalle $[0; 2]$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra utiliser la valeur approchée $\alpha \approx 0,64$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x^2}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- a) On sait que $\mathcal{C}_f$ coupe d'axe des ordonnées au point $A(0; 4)$ et que sa tangente en A a pour coefficient directeur -1 .

Démontrer que $f(x) = (-x + 4)e^{-x^2}$.

- b) Pour tout réel x de l'intervalle $[0; 2]$ on définit les points suivants :

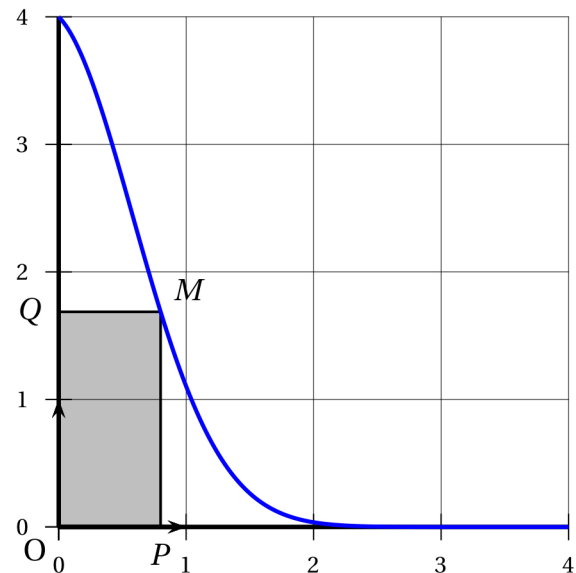
M le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x; f(x))$

P le point de coordonnées $(x; 0)$

Q le point de coordonnées $(0; f(x))$.

On note $A(x)$ l'aire du rectangle $OPMQ$.

La figure ci-contre sur laquelle une partie de la courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée rappelle ces notations.



- c)
 - i. Exprimer $A(x)$ en fonction de x .
 - ii. Déterminer la valeur de x pour laquelle $A(x)$ est maximale.
 - iii. Démontrer que lorsque $A(x)$ est maximale, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en M est parallèle à la droite (QP)

3. On note S l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$ l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

- a) Calculer $I = \int_0^2 -xe^{-x^2} dx$ (on donnera la valeur exacte).

- b) On donne $J = \int_0^2 e^{-x^2} dx \approx 0,882$. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de S

- c) Est-il possible de placer le point M pour que l'aire du rectangle $OPMQ$ soit égale à la moitié de l'aire S ?

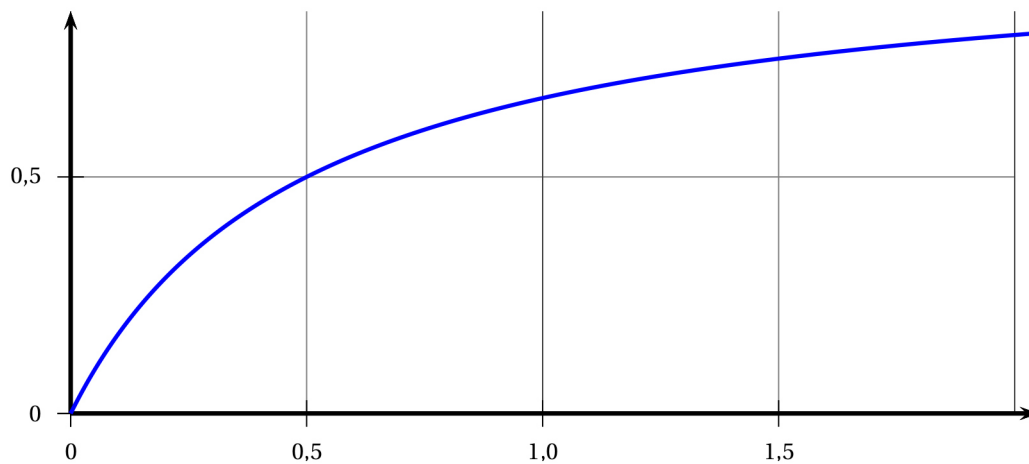
2^e problème

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par

$$f(x) = \frac{2x}{1+2x}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe C représentative de f .



- a) En utilisant une méthode graphique, construire les points de C d'abscisses u_0 , u_1 , u_2 et u_3 (aucun calcul n'est attendu).
 - b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?
2. a) Étudier les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.
- b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- c) En déduire que la suite (u_n) converge. Que peut-on affirmer sur sa limite notée ℓ ?
3. On considère à présent la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{1-2u_n}{u_n}$.
- a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique et donner sa raison.
 - b) Déterminer l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n .
 - c) En déduire la limite de la suite (u_n) .
 - d) Déterminer par le calcul le premier entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq 0,501$.