

MATHÉMATIQUES – TEST DE RENTRÉE

La calculatrice est autorisée. Durée : 2 heures. Vous conserverez votre sujet.

1^{er} problème

Dans cette partie, on considère les fonctions f , c et s définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad c(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad s(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Étude de la fonction s :
 - a) Déterminer la fonction dérivée de s .
 - b) Étudier les limites de la fonction s en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - c) Construire le tableau de variation(s) de la fonction s .
 - d) Construire le tableau de signe(s) de la fonction s .
2. Étude de la fonction c :
 - a) Déterminer la fonction dérivée de c .
 - b) Dédire d'une question précédente le tableau de variation(s) de la fonction c .
 - c) Étudier la convexité de la fonction c .
3. Montrer que $c^2 = s^2 + 1$.
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.
5. Dédire des questions précédentes une expression très simple de $f \circ s(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
6. Simplifier $s \circ f$.
7. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $(c(x) + s(x))^n = c(nx) + s(nx)$.
8. Quelques résultats sur la fonction f :
 - a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
 - b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
 - c) Retrouver avec la question précédente l'expression simplifiée de $(f \circ s)'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
 - d) Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que $\int_a^b (f \circ c)'(t) s(t) dt = (f \circ c)(b) - (f \circ c)(a)$ puis en déduire :

$$\int_a^b (f' \circ c)(t) s(t) dt = \int_{c(a)}^{c(b)} f'(t) dt$$

9. Dans le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on note $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x; y)$ de $\mathcal{P}$ et tels que $x^2 - y^2 = 1$ et on note Ω l'ensemble des points de coordonnées $(\lambda c(t); s(t))$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \{1, -1\}$.
 - a) Montrer que $\Omega \subset \mathcal{H}$.
 - b) En déduire que $\Omega = \mathcal{H}$.

La fonction c est appelée cosinus hyperbolique et est notée **cosh** ou **ch**. La fonction s est appelée sinus hyperbolique et est notée **sinh** ou **sh**.

2^e problème

Soit la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

On veut ici étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1+u_n}$.

On posera dans la suite, pour $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 - x - 1$ et $g(x) = f(x) - x$.

1. Justifier que f est croissante.
2. Déterminer les racines du polynôme P . On les notera β et γ où $\beta < \gamma$.
3. a) Justifier que $f(\gamma) = \gamma$.
 b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \gamma$.
4. Pour $x \in [0; +\infty[$, montrer que $g(x)$ est du signe de $-P(x)$ et donc de celui de $\gamma - x$.
5. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 b) En déduire qu'elle converge vers un réel que l'on notera ℓ .
6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$. Utiliser la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour montrer que $\ell = \gamma$.