

# UN PROGRAMME D'ENTRAÎNEMENT DE RENFORCEMENT MUSCULAIRE

Ce programme permet de travailler le renforcement musculaire des fléchisseurs et des extenseurs du rachis.

- 1 JUMPING JACK**  
Position bras rendu à l'horizontale, jambes écartées, serrant les jambes en claquant des mains.
- Faire ces mouvements en accélérant le rythme progressivement.
  - Conserver le dos droit.
  - Contracter les fessiers.
- 1 min

- LA CHAISE**
- Position assise, se relever et revenir à la position initiale.
- Conserver le dos droit.
  - Les jambes sont tendues et non verrouillées.
  - Contracter les abdominaux.
- 1 min

- 3 LE GAINAGE FRONTAL**  
Position allongée, se maintenir sur les coudes et sur la pointe des pieds.
- Conserver le dos droit.
  - Contracter les fessiers.
  - Descendre les épaules vers la taille.
  - Contracter les abdominaux.
- 20 sec x3

- LES POMPES**
- Les mains sont posées au sol, largement écartées, descendre le buste jusqu'à frôler le sol avec la tête puis remonter.
- Inspirer lors de la descente et expirer lors de la remontée.
  - Contracter les abdominaux.
  - Respecter l'alignement tête/épaules/bassin/jambes.
- 2 min

- 5 LES FENTES ARRIÈRE ALTERNÉES**  
Départ pieds parallèles à la largeur des épaules, réaliser des fentes arrière avec une flexion des genoux à 90°.
- Garder le genou au-dessus de la cheville.
- 2 min

- LES ABDOMINAUX TRADITIONNELS**
- Position allongée sur le dos, pieds au sol, tendre les bras, soulever les épaules, les mains viennent toucher le dessus du genou.
- Réaliser l'exercice le plus lentement possible.
  - Ne pas reposer la tête ni les épaules au sol.
- 1 min

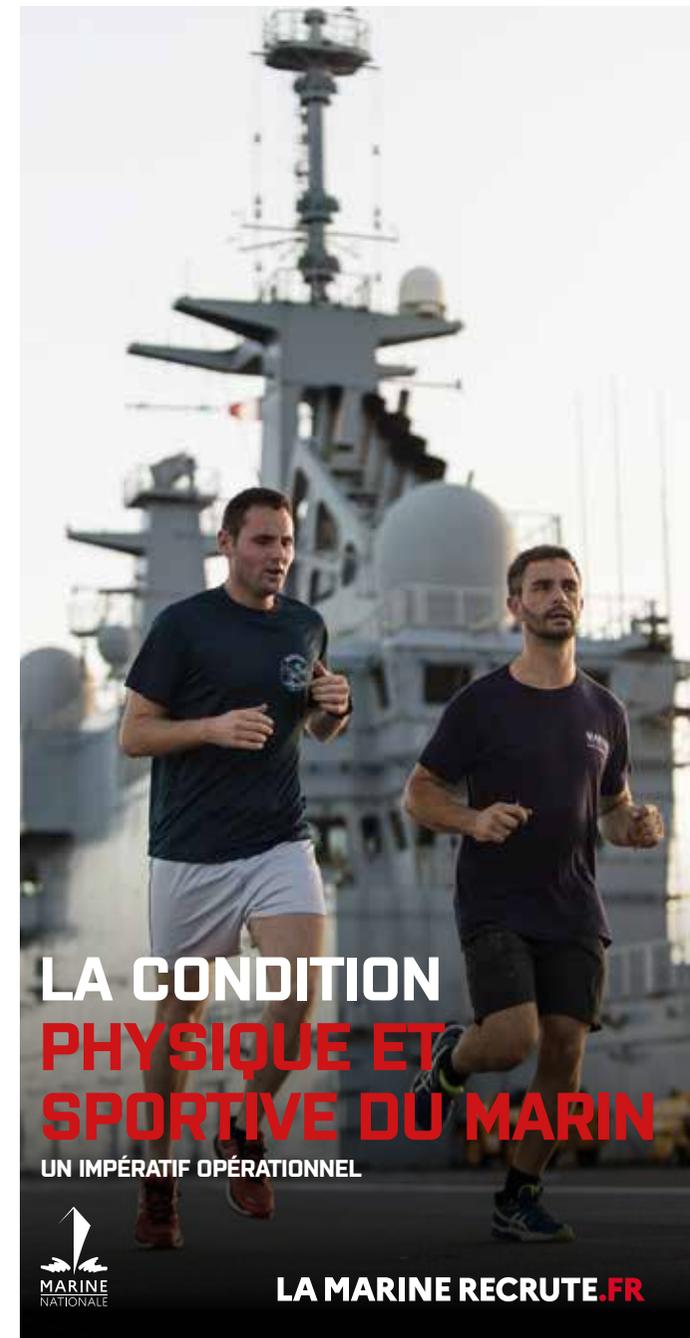
Chaque année, la Marine nationale recrute 4 000 jeunes, du niveau 3<sup>e</sup> à bac + 5, de 16 à 30 ans, dans 80 métiers. Prenez rendez-vous avec un conseiller dans le bureau de recrutement le plus proche de chez vous.

## 80 MÉTIERS ET 4000 POSTES ACCESSIBLES À TOUS



Scannez ce QR code et retrouvez les épreuves sportives

Service de recrutement de la Marine - ne pas jeter sur la voie publique



# QUELLE PLACE OCCUPE LE SPORT DANS LA MARINE?

Une bonne condition physique sportive est indispensable, quel que soit le métier choisi. Durant votre carrière, vous passerez régulièrement des épreuves qui attesteront de votre bonne condition et de vos capacités à répondre aux impératifs du combat de haute intensité, si vous évoluez au sein des unités opérationnelles.

## LES TESTS DU DÉPARTEMENT D'ÉVALUATION

Durant votre processus de candidature, vous passerez par un département d'évaluation (DE) pour passer une visite médicale ainsi que des tests psychologiques et psychotechniques.

Vous passerez également une série d'épreuves sportives, soumises par un barème divisé en 3 catégories : S1 (très bon), S2 (bon) et S3 (insuffisant).

HOMMES	Luc léger	Tractions	Squats
S1	Pallier 10 à 12	à partir de 13	à partir de 55
S2	Pallier 7 à 9.45	5 à 12	46 à 54
S3	Pallier 1 à 6.45	0 à 4	0 à 45

FEMMES	Luc léger	Tirages	Squats
S1	Pallier 7 à 12	à partir de 37	à partir de 53
S2	Pallier 4.45 à 6.45	22 à 36	43 à 52
S3	Pallier 0 à 4.30	0 à 21	0 à 42

## LES ÉPREUVES SPORTIVES SPÉCIFIQUES

Pour les métiers de fusilier marin, plongeur démineur, marin-pompier ou moniteur d'éducation physique et sportive, vous devrez passer des épreuves sportives supplémentaires.

### ➔ MONITEUR D'ÉDUCATION PHYSIQUE ET SPORTIVE

HOMMES	Endurance	Tractions	Aisance aquatique
20	3600	18	31'86 + 1pts remorquage du mannequin sur 10m
10	2600	8	35'10

FEMMES	Endurance	Tractions	Aisance aquatique
20	3025	13	36'86 + 1pts remorquage du mannequin sur 10m
10	2450	3	40'10

### ➔ PLONGEUR DÉMINEUR

	VAMEVAL	Aisance aquatique	Cordes	Abdos
20	Pallier 19	100s	10s	55
10	Pallier 12	100m + 10		

### ➔ MARIN POMPIER

	Luc léger	VAMEVAL	Tractions
HOMMES	Pallier 7.5	Pallier 12	5
FEMMES	Pallier 5.75	Pallier 9	3

### ➔ FUSILIER MARIN

	HOMMES	FEMMES
Tractions	4	10s
Abdominaux	30	20
VAMEVAL	Pallier 14	Pallier 10
Marche 4km avec sac	<18min - 6kg	<20min - 3kg
Natation 100m brasse + apnée verticale 2m	Épreuve non chronométrée et éliminatoire	

## LES TESTS DURANT LA FORMATION

Lors de votre arrivée en école pour votre formation militaire et maritime, vous passerez des épreuves dans le cadre du contrôle de la condition physique générale (CCPG).

Trois aptitudes sont contrôlées par autant d'épreuves :

- > Endurance cardio-respiratoire avec le VAMEVAL ou Luc léger ;
- > Aisance aquatique avec 100m nage libre + 10m d'apnée ;
- > Capacité musculaire générale avec des pompes.

Le barème global des épreuves est sur 60 points. Il vous faut atteindre un minimum de 31 points sur 60 pour valider votre CCPG.

Les barèmes indiqués correspondent à ceux pour une personne de moins de 29 ans.

HOMMES	Luc léger	Aisance aquatique	Pompes
20	Pallier 12	100s	50
10	Pallier 7.5	100m+10	30

FEMMES	Luc léger	Aisance aquatique	Pompes
20	Pallier 9	120s	32
10	Pallier 5.25	100m+10	16

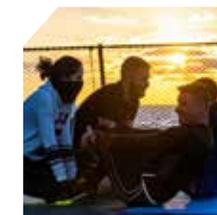
La validation du CCPG au début de votre formation est un impératif.

Si vous obtenez :

- > Moins de 10 sur 60, votre engagement dans la Marine prendra fin.
- > Entre 10 et 31, vous signerez un contrat d'objectif, qui est un engagement de votre part pour suivre un programme d'entraînement particulier qui doit vous permettre d'obtenir un minimum de 31 sur 60 à la fin de votre formation.

## LES TESTS DURANT LA CARRIÈRE

Chaque année, les marins doivent passer les CCPG, afin de certifier de leur bonne condition physique. Les barèmes évolueront en fonction de votre âge.



Classes préparatoires scientifiques (MP, PSI, MPSI, PCSI)

L'importance de l'épreuve de français–philosophie aux concours militaires ne se dément pas. Une préparation ambitieuse s'impose qui doit commencer dès les vacances d'été. Il serait absurde de diminuer vos chances en ne profitant pas de la période estivale pour lire, approfondir et prendre de l'avance.

Voici le programme officiel ainsi que votre feuille de route.

<p style="text-align: center;"><b>Programme de français – philosophie pour l'année scolaire 2024-2025</b></p>
---

**I. Thème :** Individu et communauté

**II. Œuvres :** vous veillerez à acheter les éditions indiquant « **Traduction prescrite** »

- ESCHYLE, *Les Sept contre Thèbes, Les Suppliantes*
- SPINOZA, *Traité théologique-politique*, Préface et chapitres XVI à XX
- Edith WHARTON, *Le Temps de l'innocence*

**III. Travail à faire :**

Vous devez avoir lu les 3 œuvres et exploité les préfaces et dossiers avant la rentrée. Ne pas prendre d'avance quand on entre en prépa, c'est déjà être en retard.

En librairie, vous trouverez de nombreuses publications consacrées à ce programme :

- Choisissez un volume pour l'étude des œuvres et du thème ;
- Prenez aussi un volume d'entraînement à la dissertation (sujets analysés et rédigés).

**Équipez-vous bien et mettez-vous au travail pendant l'été !**

**IV. Contrôle des connaissances :**

Notez qu'un contrôle de vos connaissances est programmé dès la rentrée. Il aura pour objectif d'évaluer la qualité de votre lecture des textes au programme.

**Sans travail, point de salut.**

Exploitez au cours de l'été les ressources offertes par le site qui vous est réservé :

<https://prepas-lycee-naval.com>

Nom d'utilisateur
-------------------

LN_29*
--------

Mot de passe
--------------

hauban
--------

## GETTING TO KNOW YOU AND YOUR NEEDS

NAME :

FORM :

- Quel(s) concours envisagez-vous présenter ? Pour quelle(s) école(s) ? Pour chaque concours, connaissez-vous le format des épreuves en anglais (écrit/ oral) ? Si oui, précisez

	tick	Ecoles visées	Format épreuve	
			écrit	oral
CCINP				
CENTRALE				
MINES-PONTS				
AUTRE...				

## YOU AND ENGLISH...

## Your strengths and weaknesses

- Vos points forts (à l'écrit, à l'oral, méthodologie...)
- Vos points faibles (à l'écrit, à l'oral, méthodologie...)
- Les points que vous aimeriez travailler plus particulièrement cette année (précisez ex : Gr les articles / syntaxe / temps du passé, ...)
- Résultats l'an dernier :
  - Ecrit (DS) quels étaient les points à améliorer/ travailler d'après les commentaires sur vos copies
  - Oral : colles : quels étaient les points à améliorer/ travailler d'après le feedback sur vos oraux

**CONSEILS POUR BIEN ABORDER LA RENTREE :****MANUELS : A ACQUERIR AVANT LA RENTREE**

- 'the Big Picture' 6<sup>ème</sup> édition, éditions Ellipses, Thomson Jean Max  
(ISBN 9782340069701)



- Fiches de civilisation américaine et britannique, éditions Ellipses, Cécile et Claude Loubignac, 5<sup>ème</sup> édition mise à jour (ISBN : 9782340084100)



- Journal'ease : poursuite de l'apprentissage
- Grammaire : garder le livre de grammaire utilisé en SUP

**ENTRAINEMENT A LA COMPREHENSION ECRITE:**

- Lecture de la presse vivement conseillée pour préparer l'écrit et l'oral : lire la presse anglo-saxonne en vous penchant plus particulièrement sur les questions d'actualité ainsi que sur les articles de vulgarisation scientifique traitant de la technologie, le climat, etc.

Presse anglophone en general

Presse britannique : the Guardian, the Independent, The Telegraph, etc.

Presse américaine : the Economist, USA Today, The International Herald Tribune, The Washington Post, The Washington Times, etc.

- Vous pouvez aussi vous entrainer de manière ludique et enrichir votre vocabulaire, plusieurs applications gratuites existent telles que Quizlet (que nous utiliserons cette année) Liens invitation Quizlet :

MP : <https://quizlet.com/join/nQ5em4F8P>

Psi : <https://quizlet.com/join/Uf8PHcX9t>

## ENTRAINEMENT A LA COMPREHENSION ORALE :

- Regardez films, séries, documentaires, journaux télévisés en anglais
- Visionner des vidéos en séquences courtes de 2 ou 3 minutes. Pour ce faire, plusieurs possibilités :

Regarder notamment la BBC qui propose des vidéos de quelques minutes qui résument l'actualité ou décryptent un événement spécifique. <https://www.youtube.com/user/bbcnews/videos>

Consultez NPR, National Public Radio, qui est une radio américaine. Elle propose dans le podcast « All Things Considered » une retranscription des audios, ce qui permet de suivre le document audio en même temps que vous lisez la retranscription de l'interview. Cela vous permettra d'habituer votre oreille à la pratique de l'audio. <https://www.npr.org/programs/all-things-considered/>

Cherchez sur Youtube des Ted Talks ou des vidéos intégrées aux articles de presse des journaux qui vous intéressent.

- The Atlantic (magazine américain) : <https://www.youtube.com/user/TheAtlantic/videos>
- The Economist : <https://www.youtube.com/user/EconomistMagazine/videos>
- BBC Newsnight : <https://www.youtube.com/user/BBCNewsnight/videos>
- Vox : <https://www.youtube.com/user/voxdotcom/videos>
- The New York Times : <https://www.youtube.com/user/TheNewYorkTimes/videos>

## TRAVAILLER LA LANGUE :

- Lexique :

Travail en cours d'année sur certains chapitres de 'The Big Picture'

Journal'ease. Révisez les pages étudiées en 1<sup>ère</sup> année. **Notez le vocabulaire nouveau**

**dans les documents lus ou écoutés cet été.**

- Grammaire : revoir les points qui vous ont posé problème en 1<sup>ère</sup> année.

## TRAVAIL SPECIFIQUE A FAIRE POUR LA RENTREE :

**PRESS REVIEW SUMMER 2024** : CHOOSE AN ARTICLE, VIDEO OR OTHER that you find particularly interesting. Prepare a brief oral account (topic, facts, key ideas ) + issue raised. BRING THE DOCUMENT FOR THE FIRST CLASS.

ENFIN, MERCI DE COMPLETER ET RAPPORTER/ M'ENVOYER LE QUESTIONNAIRE CI-JOINT AFIN DE ME PERMETTRE D'ORGANISER ET D'ADAPTER LES COURS A VOS BESOINS

**ENJOY YOUR HOLIDAY AND SEE YOU ALL IN AUGUST**



MPSI → MP – PCSI → PSI

*Cahier de vacances 2023*

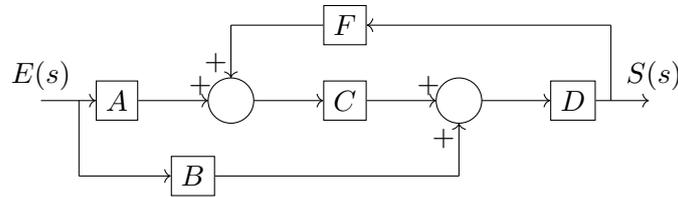
# Sciences industrielles de l'ingénieur

---

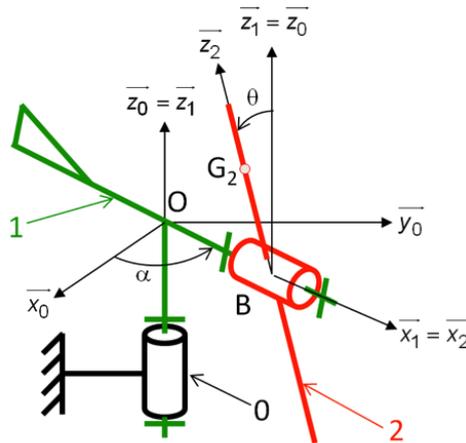
Brest, le 22 juin 2023

\* facile; \*\* moins facile.

**Activité 1\*** Déterminer la fonction de transfert  $H(s) = \frac{S(s)}{E(s)}$  du schéma-bloc ci-dessous.

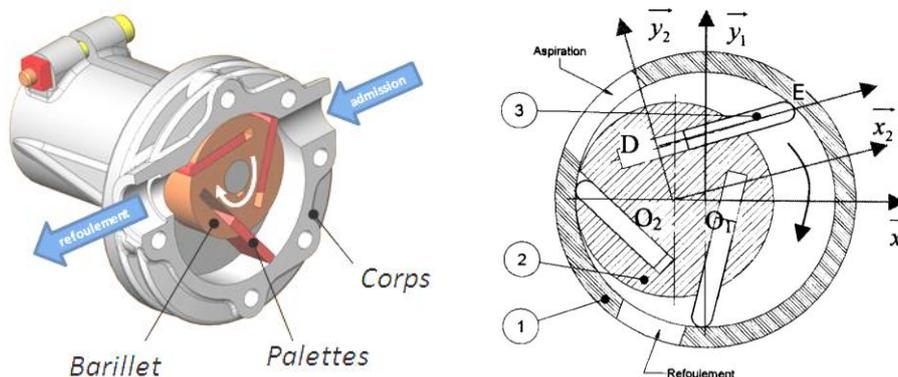


**Activité 2\*** Le schéma ci-dessous présente la cinématique d'une éolienne. Déterminer  $\vec{v}(G_2, 2/0)$  et  $\vec{a}(G_2, 2/0)$ .

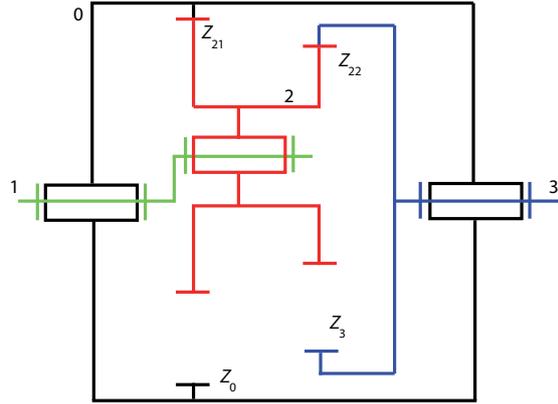
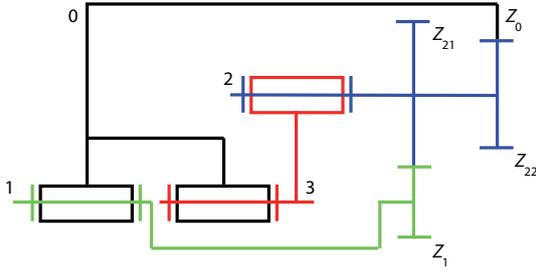


On donne  $\vec{OB} = b\vec{x}_1$  et  $\vec{BG}_2 = c\vec{z}_2$ .

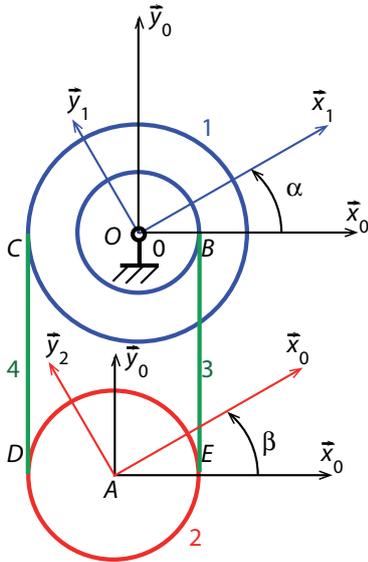
**Activité 3\*\*** Déterminer la loi entrée/sortie  $\lambda = f(\alpha)$  de la pompe à palettes. On donne  $\vec{O_2D} = d\vec{y}_2$ ,  $\vec{DE} = \lambda\vec{x}_2$ ,  $\vec{O_1O_2} = -e\vec{x}_1$ ,  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  et  $\|\vec{O_1E}\| = R$ .



**Activité 4\*** On considère les réducteurs dont le schéma cinématique est fourni ci-après. La référence étant le bâti 0, déterminer, par rapport à la référence supposée fixe, la fréquence de rotation  $N_3$  de l'arbre de sortie 3 en fonction de la fréquence de rotation  $N_1$  de l'arbre d'entrée 1. On notera  $Z_i$  le nombre de dents de la roue  $i$ .



**Activité 5\***



On considère un bâti 0, auquel est attaché le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

La poulie 1, de centre  $O$ , est liée au bâti par une liaison pivot parfaite d'axe  $(O, \vec{z}_0)$ . Elle porte deux surfaces cylindriques de rayon  $r$  et  $R$  ( $r < R$ ). Le repère  $R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  est lié à la poulie 1 et on pose

$$\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$$

La poulie 2, de centre  $A$ , est associée au repère  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$  et on pose

$$\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$$

Un câble inextensible, infiniment souple et de masse négligeable, est enroulé sur les deux surfaces cylindriques de la poulie 1. Il relie les deux poulies par les brins  $BE$  et  $CD$  qui sont parallèles à  $\vec{y}_0$ .

L'action mécanique connue est caractérisée par

$$\mathcal{T}(e \rightarrow 2) = \begin{cases} F\vec{y}_0 \\ 0 \end{cases}_A$$

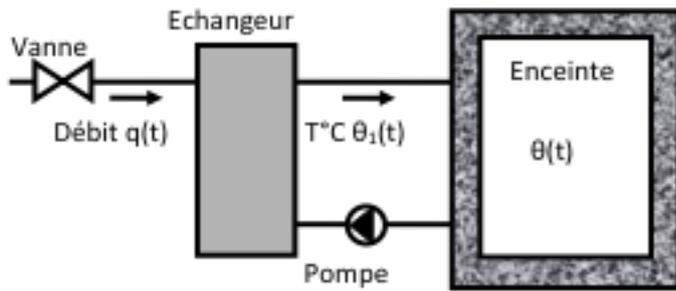
De plus, la poulie 1 est soumise à

$$\mathcal{T}(e \rightarrow 1) = \begin{cases} 0 \\ N\vec{z}_0 \end{cases}_O$$

Le problème peut être considéré comme plan. L'ensemble est en équilibre statique. Les effets dus à la masse des différents éléments sont négligés devant les autres actions extérieures.

1. Donner le torseur de l'action de liaison en  $O$ .
2. Déterminer les torseurs d'actions mécaniques sur les câbles.
3. Déterminer les actions sur la poulie 2.
4. Établir une relation entre  $N$  et  $F$  et déterminer les actions sur la poulie 1.

### Activité 6\*



Le système représenté ci-contre est chargé de maintenir la température d'une enceinte. Le chauffage est assuré par un échangeur thermique. Une vanne permet de réguler le débit dans l'échangeur.

On note  $\alpha(t)$  l'angle d'ouverture de la vanne,  $q(t)$  le débit volumique dans l'échangeur,  $\theta_1(t)$  la température en sortie de l'échangeur,  $\theta(t)$  la température de l'enceinte.

On donne les modèles de connaissance qui régissent le système :

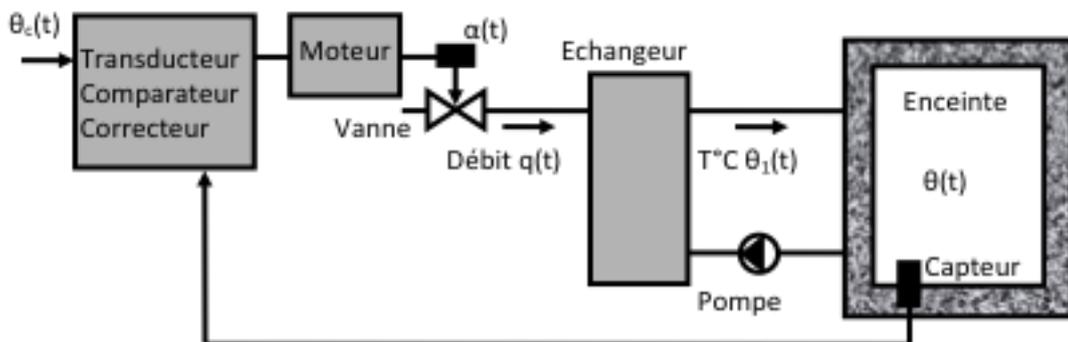
- $q(t) = k_0\alpha(t)$  (loi de fonctionnement de la vanne donnant le débit en fonction de l'angle d'ouverture de la vanne) ;
- $\theta_1(t) + \tau_1 \frac{d\theta_1(t)}{dt} = k_1q(t)$  (loi de transfert de chaleur dans l'échangeur) ;
- $\theta(t) + \tau_2 \frac{d\theta(t)}{dt} = k_2\theta_1(t)$  (loi de transfert de chaleur dans l'enceinte).

On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles. L'entrée du système est l'angle d'ouverture de la vanne  $\alpha(t)$  et la sortie, la température de l'enceinte  $\theta(t)$ .

1. Traduire dans le domaine de Laplace les équations du modèle de connaissance. En déduire les différents modèles de comportement et les fonctions de transfert associées.
2. Représenter le système par un schéma-bloc faisant intervenir les 3 blocs précédemment définis.

Afin de réguler la température, on choisit de motoriser la vanne. On installe un capteur dans l'enceinte qui permet de mesurer la température et la de traduire en une tension  $u_{mes}(t)$  (on peut modéliser le capteur par un gain pur  $K_{mes} = 0,02$ ). La tension  $u_{mes}(t)$  est comparée à la tension de consigne  $u_c(t)$  issue d'un transducteur de fonction de transfert  $T(p)$ . En fonction de cet écart amplifié par un correcteur de gain  $K_c$ , la vanne s'ouvre ou se ferme.

Le schéma ci-dessous précise l'architecture du système.



On donne la fonction de transfert du moteur  $M(p) = \frac{\alpha(p)}{U_m(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$ .

3. Représenter par un schéma-bloc le système régulé dont l'entrée est la température  $\Theta_c(p)$ .
4. Quelle doit être la fonction de transfert du transducteur de façon à annuler l'écart  $\varepsilon(p)$  quand la température de consigne et la température de l'enceinte sont égales ?

### Activité 7\*\*

Dans un système de transmission de données, on souhaite une certaine sécurité, c'est-à-dire être capable de détecter et de corriger une erreur. On désire transmettre des mots de 4 bits sur un canal entaché d'erreur de transmission. Pour cela, on utilise le codage de Hamming.

Pour transmettre les quatre éléments binaires  $(m_1, m_2, m_3, m_4)$  correspondant à un chiffre du système décimal, on ajoute trois éléments binaires  $(k_1, k_2, k_3)$  pour assurer des contrôles de parité. On émet alors un mot binaire de 7 bits  $(k_1, k_2, m_1, k_3, m_2, m_3, m_4)$  contenant le mot binaire de quatre bits  $(m_1, m_2, m_3, m_4)$ .

- $t_1 = \text{parité}(k_1, m_1, m_2, m_4) = 0$  ;
- $t_2 = \text{parité}(k_2, m_1, m_3, m_4) = 0$  ;
- $t_3 = \text{parité}(k_3, m_2, m_3, m_4) = 0$ .

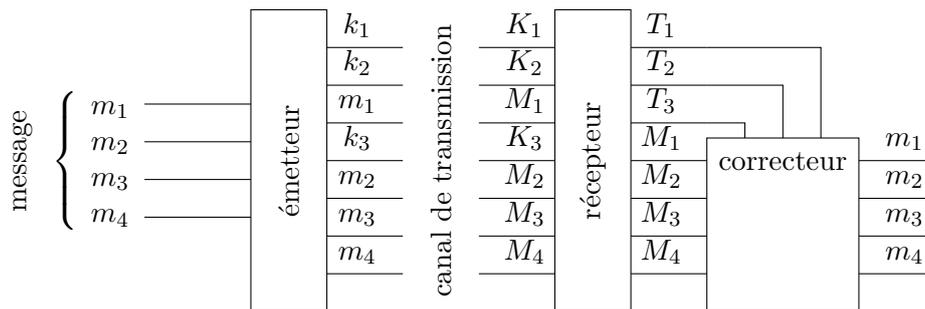
et  $t_1 = 0$  signifie que le mot binaire  $(k_1, m_1, m_2, m_4)$  contient un nombre pair de bits à 1.

À la réception, on effectue les mêmes tests de parité sur le mot  $(K_1, K_2, M_1, K_3, M_2, M_3, M_4)$  reçu

- $T_1 = \text{parité}(K_1, M_1, M_2, M_4) = 0$  ;
- $T_2 = \text{parité}(K_2, M_1, M_3, M_4) = 0$  ;
- $T_3 = \text{parité}(K_3, M_2, M_3, m_4) = 0$ .

Le résultat des tests  $T_1$  à  $T_3$  permet de former le mot binaire  $(T_3, T_2, T_1)$ .

$(T_3, T_2, T_1) = (0, 0, 0)$  indique qu'il n'y a pas d'erreur de transmission, sinon le mot binaire  $(T_3, T_2, T_1)$  indique la position du bit erroné dans le mot  $(K_1, K_2, M_1, K_3, M_2, M_3, M_4)$  qu'il est facile alors de corriger. La figure ci-après donne le schéma synoptique de la transmission de données



#### 1. Étude de l'émetteur

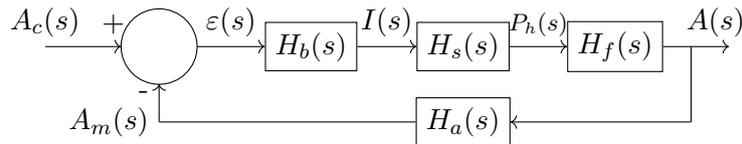
- (a) Écrire la table de vérité permettant la fabrication de fonctions  $k_1, k_2, k_3$  en satisfaisant au test de parité.
- (b) Donner la fonction simplifiée de la sortie  $k_1$ , en déduire celles des sorties  $k_2$  et  $k_3$ ,  $k_1 = f_1(m_1, m_2, m_4)$ ,  $k_2 = f_2(m_1, m_2, m_4)$ ,  $k_3 = f_3(m_1, m_2, m_4)$ .

#### 2. Étude du récepteur

- (a) Écrire la table de vérité de  $T_1, T_2$  et  $T_3$ .
- (b) Donner les fonctions simplifiées des sorties  $T_1, T_2$  et  $T_3$ .
- (c) On souhaite envoyer le bloc de données 1110. Déterminer le mot complet que l'on envoie effectivement en utilisant le code de Hamming.
- (d) On reçoit le bloc 0011110. Vérifier qu'il ne contient pas d'erreur et le corriger éventuellement.

**Activité 8\*\*** Le freinage des Airbus A318 est piloté par les ordinateurs de bord à partir des consignes du pilote et des paramètres de vol. La chaîne d'information envoie des consignes à une servovalve hydraulique qui se charge de régler la pression dans le circuit hydraulique de freinage. Les freins à disques (figure ci-dessous) décèlent l'avion proportionnellement à la pression de freinage.

Un accéléromètre de la centrale inertiel de l'avion mesure la décélération et transmet l'information à la partie commande pour le contrôle du freinage. Le schéma-blocs de l'asservissement est donné ci-dessous.



On précise les fonctions de transfert suivantes

$$H_b(s) = K_i \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s} \quad H_s(s) = \frac{K_s}{(1 + \tau_s s)^2} \quad H_f(s) = K_f$$

avec

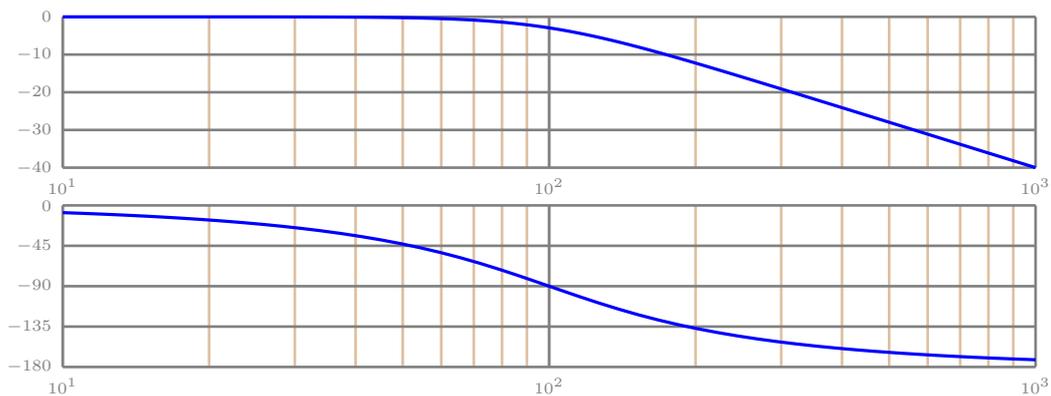
$$K_s = 100 \text{ bar} \cdot \text{A}^{-1} \quad \tau_s = 8,7 \times 10^{-2} \text{ s} \quad K_f = 0,08 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{bar}^{-1} \quad \tau_i = 1 \text{ s}$$

$K_i$  est à déterminer et sera dans un premier temps considéré comme unitaire.

L'objectif de l'étude est de déterminer la loi de commande à implanter dans la partie commande de façon à assurer les performances correctes au freinage. Le cahier des charges est le suivant :

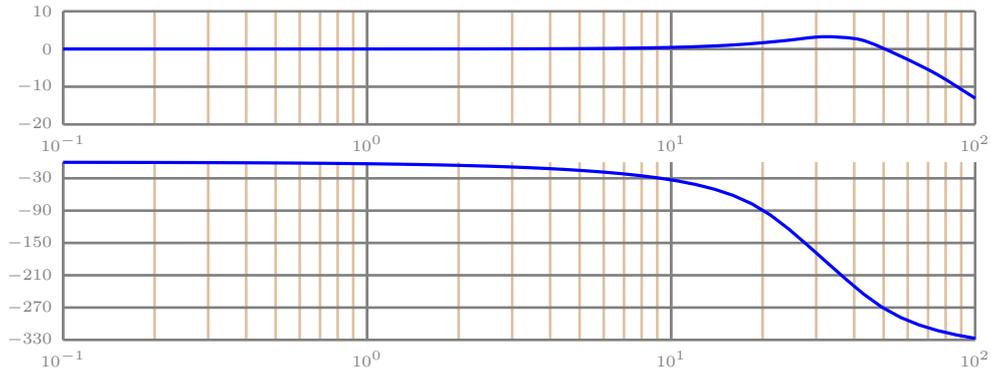
- *précision*, la valeur de décélération doit être atteinte exactement ;
- *surtension* en boucle fermée inférieur à 5 dB ;
- *rapidité*, bande passante à -3 dB supérieure à 10 Hz.

La figure ci-dessous donne le diagramme de Bode de l'accéléromètre, fourni par le constructeur.



1. Déterminer la bande passante à -3 dB de l'accéléromètre à partir de son diagramme de Bode. Que pensez-vous de cette valeur par comparaison à la bande passante attendue dans le cahier des charges? Identifier la forme et les caractéristiques de la fonction transfert de l'accéléromètre.
2. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $K_i = 1$ .

La figure ci-dessous donne le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF).



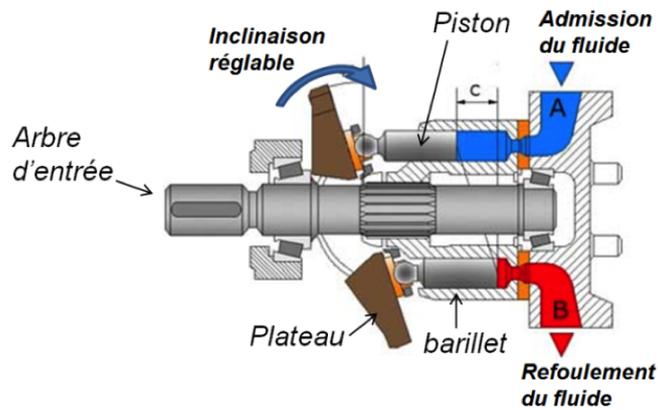
3. Comment interpréter la valeur asymptotique à basse pulsation ?
4. Déterminer la valeur de la surtension de la FTBF. Quel en sera la conséquence sur la réponse indicielle ?

### Activité 9\*\*

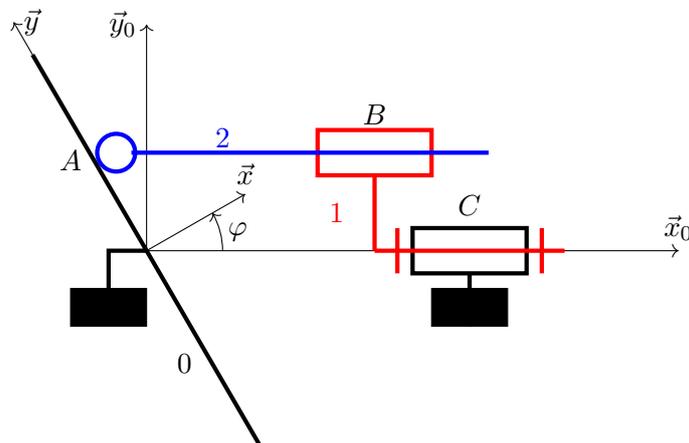


Dans le cas des pompes à pistons axiaux, les pistons sont logés dans un barillet lié à l'arbre d'entrée.

Un système de réglage de l'inclinaison du plateau, qui est fixe pendant la phase d'utilisation de la pompe, permet de faire varier le débit du fluide en sortie de la pompe.



Lorsque le débit de la pompe est réglé, c'est-à-dire lorsque l'inclinaison du plateau est fixée, on peut étudier le comportement cinématique de la pompe à partir du schéma cinématique minimal dessiné ci-dessous sur lequel un seul piston est représenté. Le plateau 2 est alors encastré avec le bâti.



Constituants et paramétrage

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$  liés au corps 0 tels que  $\vec{OC} = c\vec{x}_0$  et  $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x})$ ;
- $R_1(O, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  associé au barillet 1 tel que  $\vec{CB} = b\vec{x}_0 + r\vec{y}_1$  et  $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ ;
- $R_2(A, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  associé au barillet 2 tel que  $\vec{BA} = \lambda\vec{x}_0$ .

*Objectif de l'activité* : déterminer une relation entre le débit instantané de la pompe et la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée.

1. Donner le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du système.
2. Dessiner le graphe des liaisons de ce mécanisme.

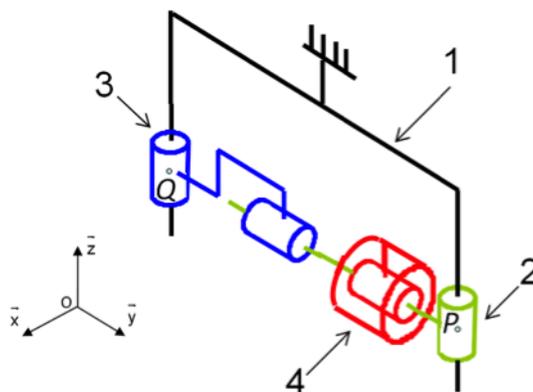
On utilisera pour la suite la modélisation suivante : 2 en liaison glissière de direction  $\vec{x}_0$  avec 1.

3. Donner l'expression, en fonction des paramètres de mouvement, des torseurs cinématiques de chacune des liaisons.
4. Déterminer, à l'aide d'une fermeture cinématique, la loi entrée-sortie en vitesse du mécanisme  $\dot{\lambda} = f(\alpha, \dot{\alpha})$ .
5. Donner la relation entre le débit instantané  $q$  en sortie de la pompe (pour un seul piston), la surface  $S$  de la section du piston et  $\dot{\lambda}$ .
6. En déduire l'expression de ce débit instantané en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée.
7. Indiquer la façon dont il faut faire évoluer l'inclinaison du plateau pour diminuer le débit de la pompe.

**Activité 10\*** Pour assurer une meilleure adhérence d'une courroie sur une poulie, il est nécessaire de tendre celle-ci.



Le système permettant de déplacer le galet 4 afin de tendre la courroie est représenté sous la forme du schéma cinématique suivant



1. Dessiner le graphe des liaisons.
2. Donner la forme du torseur cinématique de la liaison  $\mathcal{L}(2/1)$ .
3. Donner la forme du torseur cinématique de la liaison  $\mathcal{L}(3/1)$ .

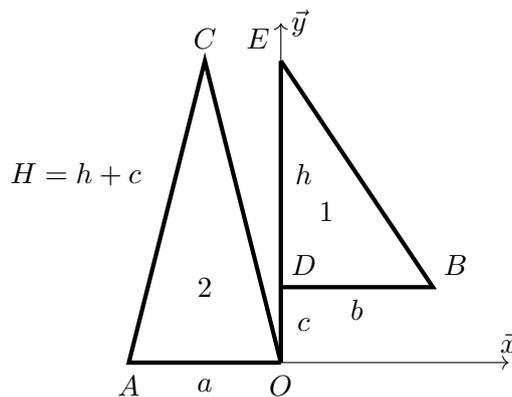
4. Donner la forme du torseur cinématique de la liaison  $\mathcal{L}(2/3)$ .
5. Déterminer la forme du torseur cinématique, au point  $Q$ , de la liaison équivalente  $\mathcal{L}_{eq}$  entre 2 et 1. Préciser son nom.
6. En déduire le schéma cinématique « minimal » spatial en prenant la même orientation que pour le schéma cinématique donné ci-dessus.

**Activité 11\*** Le voilier est un bateau se déplaçant en exploitant l'énergie du vent. Pour cela, il a nécessairement des voiles sur lesquelles le vent souffle. Il se crée alors une pression sur la voile qui va permettre de le mouvoir.

Intéressons-nous à un voilier simple à deux voiles triangulaires présenté sur la photo suivante

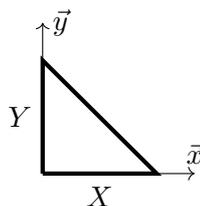


Lors de son mouvement, la forme de la voile est particulière et des effets dynamiques créent une portance qui fait avancer le voilier. Dans notre étude, nous nous intéresserons à un cas particulier lorsque le voilier est à l'arrêt et subit l'effet du vent orthogonalement à sa direction, tendant à le faire basculer. Nous supposerons dans ce cas une répartition uniforme de la pression sur l'intégralité des voiles. On propose donc le modèle suivant :



On suppose que les voiles sont parfaitement planes, dans le plan contenant le mât et l'axe du voilier. On négligera l'effet du vent sur la coque et le reste du bateau.

1. Déterminer les coordonnées du centre géométrique par le calcul du triangle ci-dessus.



2. Déterminer le centre géométrique  $G_1$  de la voile 1.
3. En déduire le torseur  $\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow 1)$  de l'action du vent sur le voile 1 en ce point.
4. Déterminer le centre géométrique  $G_2$  de la voile 2.
5. En déduire le torseur  $\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow 2)$  de l'action du vent sur le voile 2 en ce point.
6. En déduire le torseur  $\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow \text{voiles})$  de l'action du vent au pied du mât  $O$ .

**Activité 12\*** Des colis livrés par une entreprise sont protégés à l'aide d'un film transparent mis en place par une banderoleuse à plateau tournant. Pour limiter les effets dynamiques qui pourraient endommager le contenu des colis, on désire contrôler l'accélération  $\gamma(t)$  d'un point situé sur la périphérie du plateau tournant.

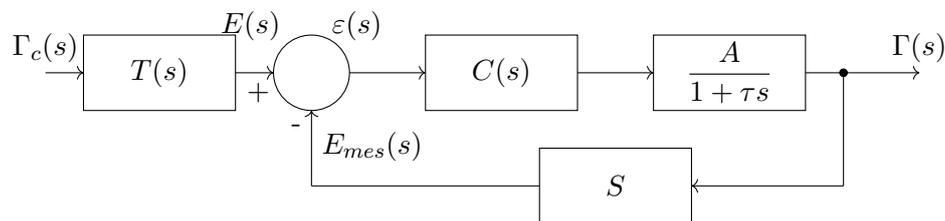
Pour cela, un accéléromètre (capteur d'accélération), de sensibilité  $S$  ( $S = 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$ ), est utilisé dans la chaîne de retour du système. Le système est donc asservi en accélération.

Le moteur permettant la motorisation du plateau est modélisé par la fonction de transfert

$$\frac{\Gamma(s)}{U_m(s)} = \frac{A}{1 + \tau s}$$

avec  $A = 1\,000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{V}^{-1}$  et  $\tau = 0,2 \text{ s}$ .

On modélise le correcteur par la fonction de transfert  $C(s)$ . L'asservissement en accélération peut alors être représenté par le schéma-bloc suivant



1. Donner la fonction de transfert  $T(s)$  de l'interface homme-machine qui assure que  $\varepsilon(t)$  soit l'image de l'erreur.

On applique à l'entrée une consigne en accélération  $\gamma_c(t) = 200u(t) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Dans un premier temps, on prend  $C(s) = 1$ .

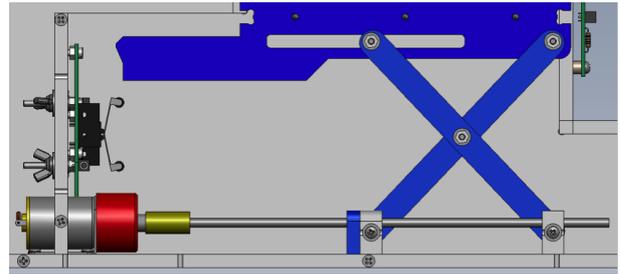
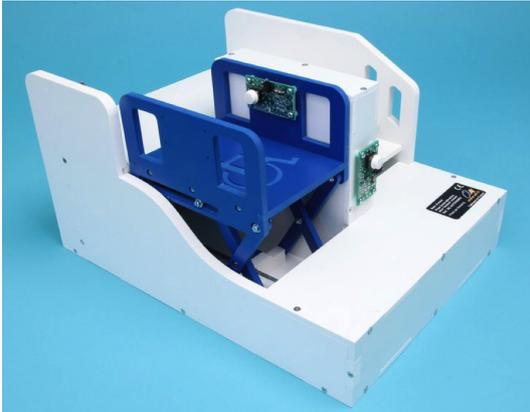
2. Déterminer l'expression de la fonction de transfert de ce système ainsi que ses paramètres caractéristiques. Réaliser l'application numérique.
3. Calculer le temps de réponse à 5 % de ce système à une entrée en échelon.
4. Donner la valeur de l'accélération  $\gamma(t)$  en régime permanent.
5. Évaluer la performance de précision. Conclure.
6. Dessiner l'allure de  $\gamma(t)$  en précisant les points caractéristiques.

On choisit maintenant un correcteur intégral  $C(s) = \frac{1}{s}$ .

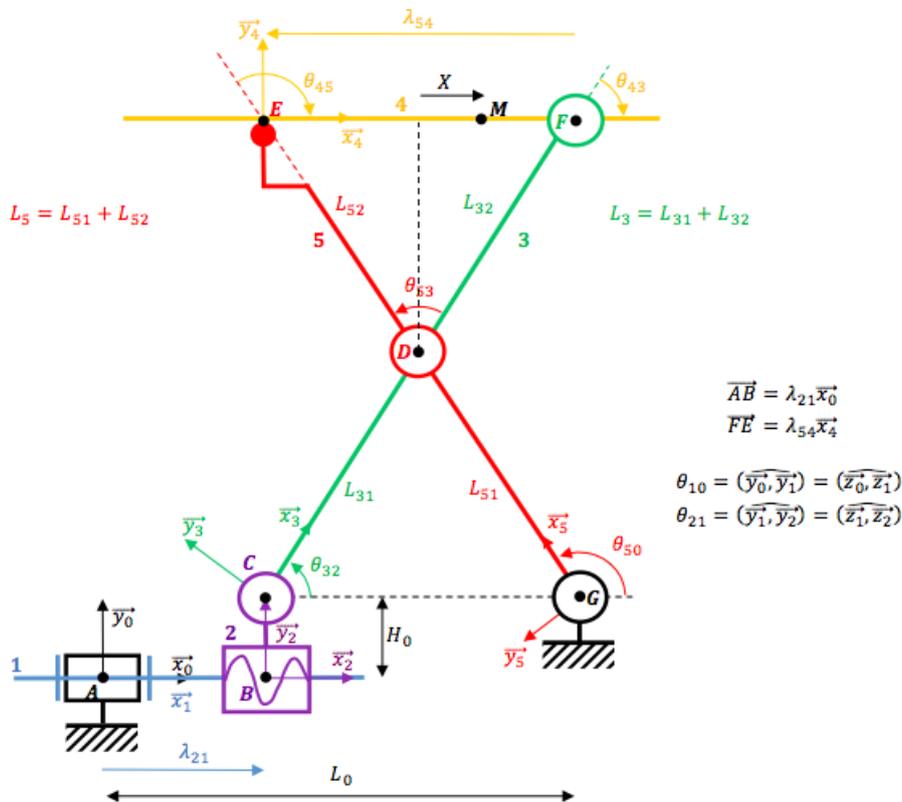
7. Déterminer l'expression de la fonction de transfert de ce système ainsi que ses paramètres caractéristiques. Faire l'application numérique.
8. Calculer le temps de réponse à 5 % de ce système à une entrée en échelon. Conclure en le comparant au système asservi sans correction.

9. Donner la valeur de l'accélération  $\gamma(t)$  en régime permanent.
10. Évaluer la performance de précision. Conclure en la comparant au système asservi sans correction.
11. Dessiner l'allure de  $\gamma(t)$  en précisant les points caractéristiques.

**Activité 13\*\*** La plateforme présentée ci-dessous a été créée afin de permettre aux personnes à mobilité réduite de monter et descendre en lieu et place de marches (escaliers, transports...). Un moteur encastré au bâti fait tourner une tige filetée qui, en déplaçant un support intermédiaire fileté mobile, crée le mouvement de 4 barres et de la nacelle.



Les mouvements des différentes pièces de ce système permettent de proposer le modèle cinématique suivant



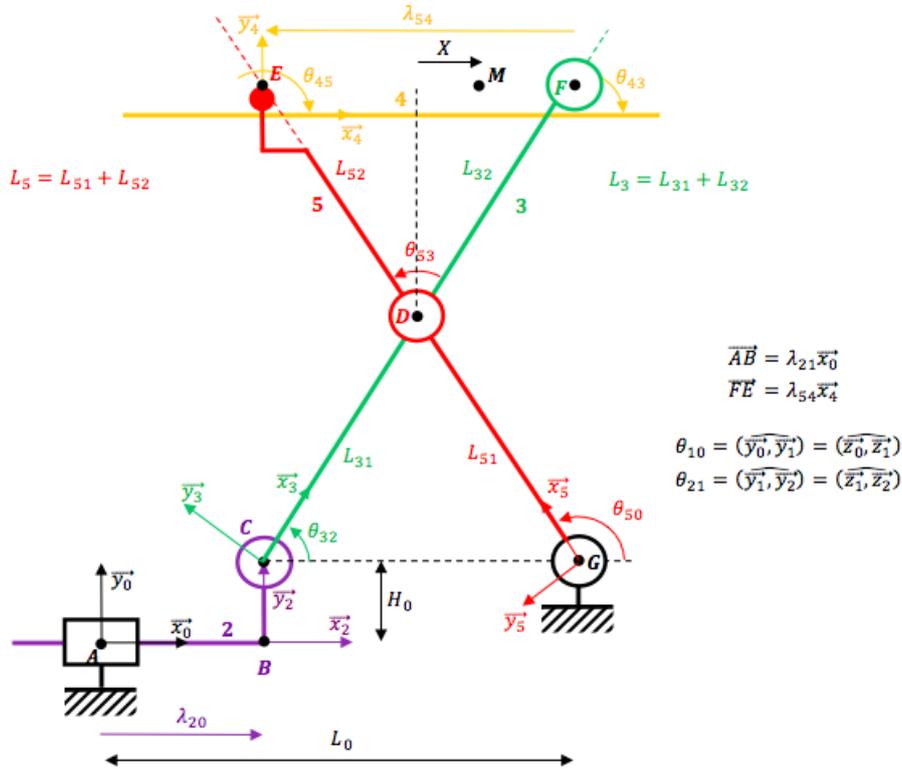
Dans le cas particulier du mécanisme étudié :  $L_{31} = L_{32} = L_{51} = L_{52}$ .

Il existe deux actions extérieures, celle du moteur sur la vis 1, un couple moteur noté  $C_m$  et celle de la gravité qui s'applique sur la masse  $m$  posée sur le plateau 4 dont le centre de gravité est le point

$M$  tel que  $\overrightarrow{DM} \cdot \vec{x}_0 = X$ . On donne le torseur de ces actions

$$\mathcal{T}(mot \rightarrow 1) = {}_A \begin{Bmatrix} 0 \\ C_m \vec{x}_0 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{T}(pes \rightarrow 4) = {}_M \begin{Bmatrix} -P \vec{y}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pour éviter d'étudier le problème en 3 dimensions, ce qui n'a pas un grand intérêt, nous proposons l'évolution suivante



On a  $\lambda_{20} = \lambda_{21}$ . Cette modification permettant d'obtenir un mécanisme plan nous oblige à redéfinir l'action du moteur en un effort dans la liaison glissière entre les pièces 0 et 2. On écrit

$$\mathcal{T}(mot \rightarrow 2) = {}_A \begin{Bmatrix} F_m \vec{x}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On appelle  $p$  le pas de la liaison hélicoïdale du système réel.

Notre objectif est de déterminer la relation liant le poids  $P$  de la masse en  $M$  avec le couple moteur  $C_m$ . On se place en statique plane et on négligera l'effet de la gravité sur les différentes pièces mis à part sur la masse en  $M$ .

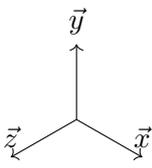
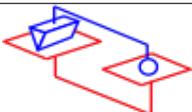
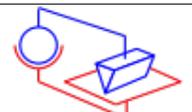
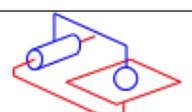
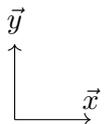
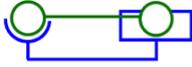
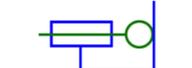
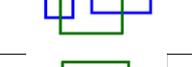
1. Donner la relation entre le couple moteur  $C_m$  exercé par le moteur réel et l'effort fictif  $F_m$  du modèle plan.
2. Réaliser un graphe des liaisons du mécanisme et faire apparaître les actions extérieures sur les pièces concernées.
3. Donner les torseurs  $\mathcal{T}(j \rightarrow i)$  des actions dans toutes les liaisons.
4. Réaliser l'inventaire du nombre d'équations et d'inconnues du problème plan afin de vérifier qu'il est possible de le résoudre.
5. Appliquer le principe fondamental de la statique (PFS) au solide 2 en  $C$  en projection dans la base  $B_0$  et en déduire un système de 3 équations.
6. Appliquer le PFS au solide 3 en  $D$  dans la base  $B_0$  et en déduire un système de 3 équations.

7. Appliquer le PFS au solide 4 en  $E$  dans la base  $B_0$  et en déduire un système de 3 équations.
8. Appliquer le PFS au solide 5 en  $D$  dans la base  $B_0$  et en déduire un système de 3 équations.
9. Récapituler les 12 équations statiques du mécanisme en faisant apparaître en rouge les données et en bleu les actions inconnues de liaison.
10. Résoudre le système afin d'exprimer toutes les inconnues de liaison en fonction de l'effort  $F_m$  ainsi que la relation liant  $F_m$  et  $P$ . En déduire  $C_m = f(P)$ .

**Activité 14\*** Liaisons équivalentes

Compléter le tableau ci-dessous en indiquant le nom et les caractéristiques géométriques de la liaison située à gauche, de la liaison située à droite et de la liaison équivalente aux deux liaisons.

Le point caractéristique (centre, contact...) de la liaison de gauche sera nommé  $A$  et celui de la liaison de droite sera nommé  $B$ .

repère	schéma	liaison à gauche	liaison à droite	liaison équivalente
				
				
				
				
				
				
				
				
				
				

**Activité 15\*** On s'intéresse ici au parcours urbain d'un véhicule comme le présente la figure ci-dessous.



On adopte un modèle ramené dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , dans la mesure où l'on considèrera que le véhicule se déplace en ligne droite horizontale. On note

- $\vec{v}(\text{vehicule}/\text{sol}) = -V_h(t)\vec{x}$ , la vitesse du véhicule par rapport au sol;
- $\vec{a}(\text{vehicule}/\text{sol}) = \gamma(t)\vec{x}$ , l'accélération du véhicule par rapport au sol.

1. Dans le cas d'un freinage nominal,  $\gamma(t) = \gamma_n = -2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  déterminer la distance parcourue en partant d'une vitesse initiale  $v_0 = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

On appelle séquence urbaine type, un trajet entre deux feux tricolores, en ligne droite, sur une route horizontale et composé :

- d'une phase d'accélération de 0 à  $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  (durée  $t_1 - t_0 = t_a$ );
- d'un parcours de 500 m à une vitesse constante de  $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  (durée  $t_2 - t_1$ );
- puis d'une phase de décélération (durée  $t_3 - t_2 = t_f$ ) avec arrêt au feu à l'instant  $t_3$  en respectant la situation de freinage nominal évoquée précédemment.

Pour simplifier, on considère que la phase d'accélération de 0 à  $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  se fait avec l'accélération  $\gamma(t) = -\gamma_n = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

2. Tracer l'évolution temporelle de la vitesse  $V_h(t)$  du véhicule par rapport au sol en fonction du temps sur la séquence urbaine type et définir son expression en fonction de  $\gamma_n$ ,  $V_0$  et  $t_2$  sur chaque intervalle de temps  $[t_0, t_1]$ ,  $[t_1, t_2]$  et  $[t_2, t_3]$ . Donner les valeurs numériques des durées  $t_1 - t_0 = t_a$ ,  $t_2 - t_1$  et  $t_3 - t_2 = t_f$ .

**Activité 16\*\*** Une antenne parabolique permet sur un satellite l'échange d'informations avec la terre. Cette antenne doit être précisément orientée vers les antennes sur terre. À cette fin, deux moteurs asservis en position assurent l'orientation angulaire. On se propose d'étudier l'un des asservissements.



Le système est piloté par une tension de consigne  $U_c$  et assure une position angulaire  $\theta$  de l'antenne. Le comportement du moteur est modélisé par une fonction de transfert du premier ordre de gain  $K_m = 11 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$  et de constante de temps  $\tau_m = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$ . Il est commandé par une tension  $U_m$  fournie par un amplificateur et admet en sortie la vitesse de rotation  $\dot{\theta}$ .

L'amplificateur est modélisé par une fonction de transfert du premier ordre de gain  $K_A = 50$  et de constante de temps  $\tau_A = 0.5 \times 10^{-3} \text{ s}$ . Il est commandé par une tension  $V$ .

Un correcteur de fonction de transfert  $C(p)$  est placé en amont de l'amplificateur et adapte la tension  $\varepsilon$  en une tension  $V$  pour commander l'amplificateur.

Un capteur de gain  $K_c = 2 \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1}$  assure la chaîne de retour en mesurant  $\theta$  et fournit une tension  $e$ . La mesure est comparée à la consigne  $U_c$  tel que  $\varepsilon = U_c - e$ .

### Étude du système avec correcteur proportionnel

1. Tracer le schéma-bloc du modèle proposé.
2. Calculer la fonction de transfert en boucle ouverte puis la fonction de transfert en boucle fermée pour une correction telle que  $C(s) = K_p$ .
3. Positionner les pôles de la fonction de transfert pour  $K_p = 1$ ,  $K_p = 2$  et  $K_p = 4$  dans le plan complexe. Les valeurs de ceux-ci seront déterminées par calcul numérique (calculatrice). Conclure sur la stabilité du moteur étudié pour ces trois gains.
4. Dans le cas  $K_p = 1$ , proposer une simplification de la fonction de transfert par la méthode des pôles dominants. En déduire les valeurs numériques des caractéristiques ( $K$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$ ) de la nouvelle fonction de transfert.
5. La réponse temporelle du satellite pour  $K_p = 1$  est fournie sur la figure ci-après. Déterminer les caractéristiques le temps de réponse à 5 %,  $tr_{5\%}$ , l'écart statique  $\varepsilon(\infty)$  et le dépassement relatif  $d_1$ .
6. Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $K_p = 1$ . Expliquer pourquoi, à basses fréquences, l'amplificateur peut être assimilé à un gain pur.



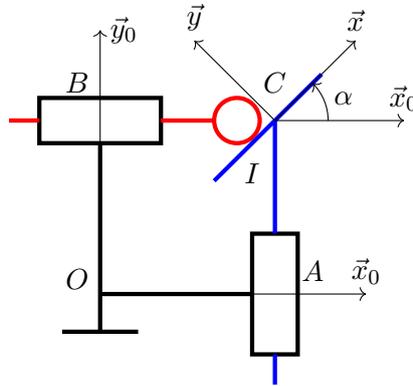
### Étude du système avec correcteur proportionnel-dérivé

On choisit d'utiliser maintenant une correction proportionnelle et dérivée telle que  $C(s) = K_p + K_d s$  avec  $K_p = 4$  et  $K_d = 10^{-2} \text{ s}$ .

7. Tracer le diagramme de Bode asymptotique du correcteur.
8. Tracer le diagramme de Bode asymptotique du système en boucle ouverte avec le correcteur proportionnel et dérivé.
9. Calculer les pôles et le zéro de la fonction de transfert en boucle fermée, les placer dans le plan complexe et en déduire la stabilité du système. Y a-t'il des pôles dominants? Quel remarque peut-on faire concernant la présence du zéro? Conclure.

**Activité 17\*\*** Au bâti 0 est associé le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . On pose  $\vec{OA} = a\vec{x}_0$  et  $\vec{OB} = b\vec{y}_0$ . La barre 1 est liée au bâti 0 par une liaison glissière parfaite d'axe  $(A, \vec{y}_0)$ . On lui associe le repère  $R_1(C, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et on pose  $\vec{AC} = y\vec{y}_0$ . Le repère  $R(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$  est également lié à la barre 1 et on pose  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x})$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha$  constant).

La barre 2 est liée au bâti 0 par une liaison glissière parfaite d'axe  $(B, \vec{x}_0)$ . On lui associe le repère  $R_0(I, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et on pose  $\vec{BI} = x\vec{x}_0$ .



Les deux barres sont en contact ponctuel avec frottement de facteur  $f$  en  $I$ , appartenant au plan  $(C, \vec{z}_0, \vec{x}_0)$ . L'action mécanique connue est caractérisée par

$$\mathcal{T}(e \rightarrow 1) = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} F\vec{y}_0 \\ 0 \end{array} \right.}, \quad F > 0$$

De plus, la barre 2 est soumise à

$$\mathcal{T}(e \rightarrow 2) = \underset{2}{\left\{ \begin{array}{l} X\vec{x}_0 \\ 0 \end{array} \right.}$$

Les effets dus à la masse des éléments sont négligés devant les autres actions extérieures.

1. Caractériser les liaisons en donnant leur torseur d'action mécanique.
2. Déterminer les différentes actions mécaniques.
3. Le système est-il réversible ?

### Activité 18\*

Le télescope Méade ETX 90 permet aux astronomes amateurs de posséder un instrument automatisé pour suivre les objets célestes. Il comporte deux axes motorisés et asservis en vitesse (altitude et azimut). Le modèle multiphysique proposé ci-dessous présente l'architecture de l'axe d'azimut.

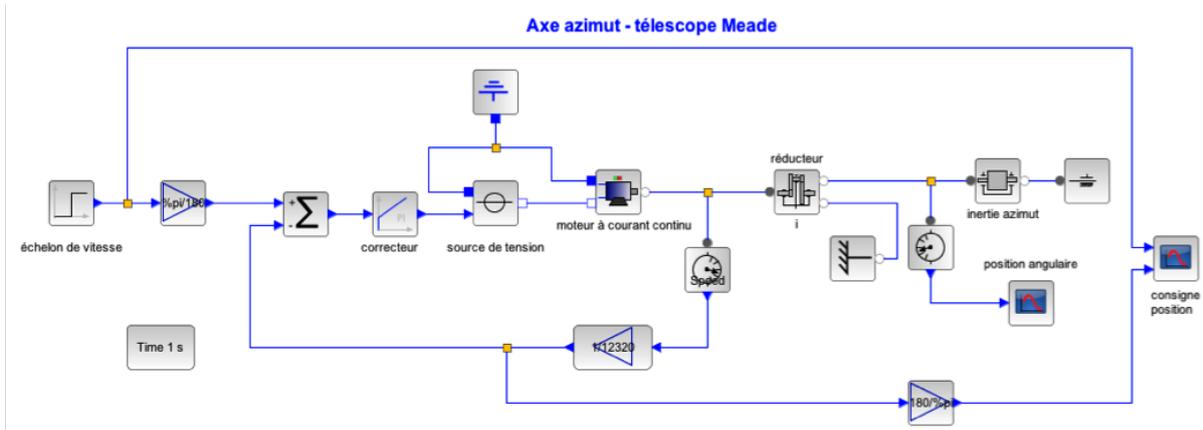
Les paramètres caractéristiques de cet axe sont :

- moteur à courant continu
  - $R = 7,1 \Omega$ ,
  - $L = 5,3 \text{ mH}$ ,
  - $k = 8,6 \text{ mN} \cdot \text{A}^{-1}$ ,
  - $J_{eq} = 3,5 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;
- réducteur
  - $i = 12\,320$ ;
- tube optique
  - $J_{tube} = 1,9 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

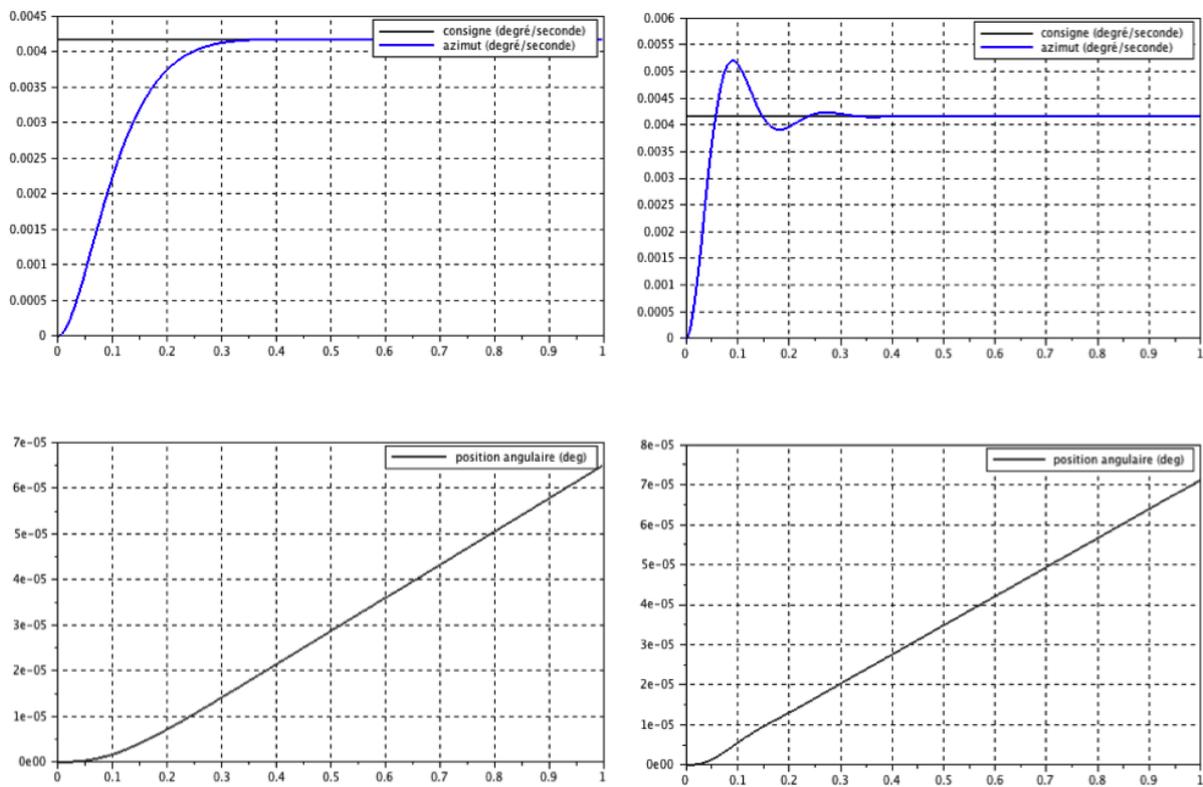


Pour qu'un objet céleste très lointain reste dans le champ d'observation du télescope, alors que la Terre tourne autour de son axe, il faut que la rotation du télescope compense celle de la Terre.

1. Déterminer alors la fréquence de rotation du télescope en degré par seconde afin que celui-ci, pointant un objet céleste lointain, le conserve dans son viseur pendant l'observation. En déduire la fréquence de rotation du moteur électrique.
2. Indiquer le rôle des blocs ne portant pas de nom. Le système est asservi : préciser la grandeur asservie.
3. Donner les équations du bloc « réducteur ».

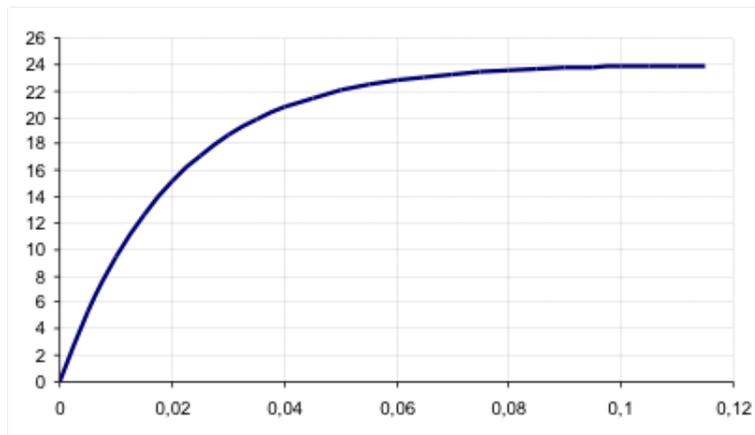


3. Les courbes ci-dessous sont issues de simulations du modèle. Le correcteur utilisé est un correcteur proportionnel et intégral. Entre les deux simulations, seule la grandeur proportionnelle a été modifiée ( $k_p = 1$  puis  $k_p = 5$ ). Indiquer, pour les deux simulations les niveaux des critères liés aux performances de stabilité, précision et rapidité de l'axe.
4. On souhaite déterminer par simulation la puissance du moteur. Proposer une modification du modèle permettant de tracer la courbe de puissance du moteur.



**Activité 19\*** L'entraînement d'un « consigneur » automatique de bouteilles est assuré par un moteur suivi d'un réducteur de rapport 20. La consigne est donnée au travers d'une interface homme/machine. Une génératrice tachymétrique délivrant 1 V pour 100 rad/s mesure la vitesse obtenue après le réducteur. Le signal délivré par la génératrice tachymétrique est comparé à celui délivré par l'interface homme/machine. Un amplificateur (correcteur de gain pur  $A$ ), placé après le comparateur, délivre un signal de commande du moteur.

Un essai en boucle ouverte permet d'évaluer la fréquence de rotation en rad/s de l'ensemble constitué du moteur + réducteur en fonction de sa tension d'alimentation. Le signal test est un échelon de tension de 24 V. La réponse est tracée ci-dessous



1. Représenter le schéma bloc de cet asservissement en précisant le nom des constituants sous les blocs, les informations véhiculées entre les blocs ainsi que leur symbole et leur unité (les fonctions de transfert à l'intérieur seront déterminées par la suite).
2. Déterminer la fonction de transfert du réducteur.
3. Déterminer la fonction de transfert du capteur. Si on étudie juste ce capteur, et qu'on lui envoie un échelon en entrée, tracer sur un même graphique les allures de l'entrée et de la réponse temporelle de ce capteur. Comment est appelée cette fonction de transfert ?
4. Quelle doit être la fonction de transfert de l'interface homme/machine pour que  $\varepsilon(t)$  soit l'image de l'erreur ?
5. Déterminer la fonction de transfert du moteur.
6. En déduire la fonction de transfert du système.

La vitesse angulaire que l'on souhaite obtenir est 0,2 rad/s pour le plateau (de façon que les bouteilles ne tombent pas).

7. Déterminer la valeur maximale du signal obtenu après le comparateur.
8. Calculer la valeur de  $A$  de façon que la tension d'alimentation du moteur ne dépasse pas 48 V (valeur maximale autorisée).

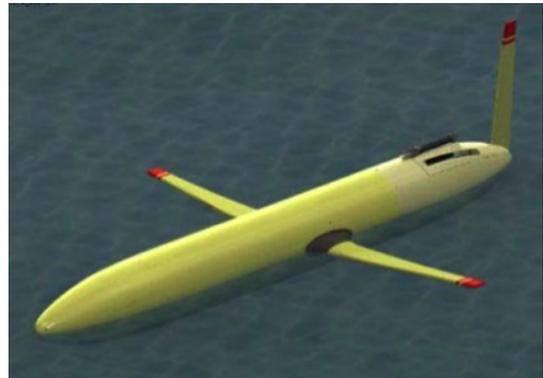
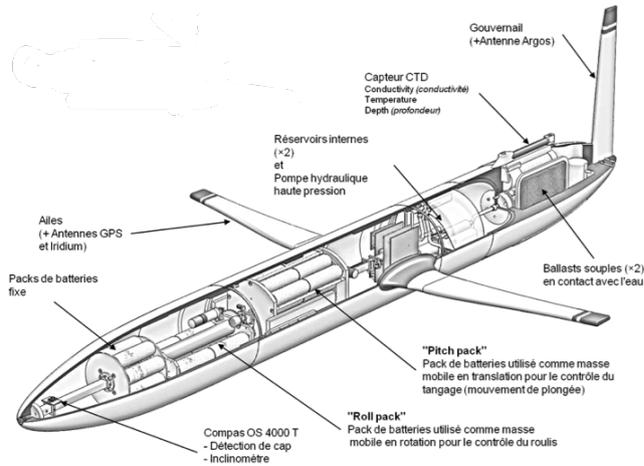
Pour cette valeur de  $A$ ,

9. Déterminer le temps de réponse.
10. Calculer la valeur atteinte par la vitesse en régime permanent.
11. Déduire l'erreur statique de cet asservissement de vitesse. Donner ensuite cette erreur en %.

Afin d'améliorer les performances de l'asservissement, on admet que  $A$  puisse prendre n'importe quelle valeur.

12. Quelle devra être la valeur de ce gain si on souhaite obtenir une erreur statique inférieure à 0,1 % sur la vitesse ?
13. Que pourrait-il se passer réellement ?

## Activité 20\* Panne d'un hydroplaneur



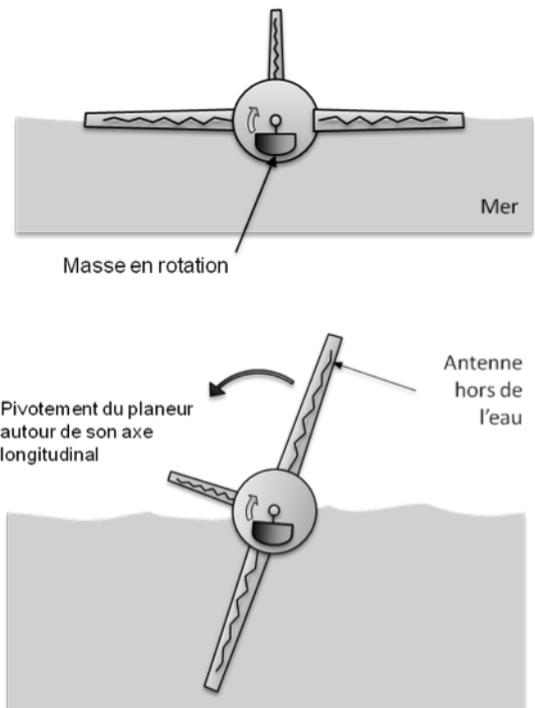
Dans l'objectif d'optimiser le fonctionnement d'un hydro planeur il faut tenir compte de toutes les procédures de fonctionnement prévues, comme celle d'alerte en cas de panne de la transmission des données, qui impose d'émettre un signal de détresse permettant de venir repêcher l'hydro planeur.

À chaque remontée en surface, l'hydroplaneur se connecte à un réseau sans fil (IRIDIUM) afin de transmettre les données enregistrées. L'hydroplaneur dispose de trois antennes logées dans la dérive et dans chaque aileron stabilisateur. Cette solution implique que, pour émettre en surface, l'engin pivote sur lui-même d'un quart de tour pour faire émerger une des deux antennes dédiées au réseau IRIDIUM. Pendant cette phase, le dispositif de basculement, qui permet de contrôler le tangage de l'hydroplaneur, n'est pas actif.

En fin de charge des batteries ou en cas de souci technique, l'hydroplaneur dispose d'une balise ARGOS (dont l'antenne est dans la dérive verticale) qui permet de le localiser et d'envoyer un navire pour le récupérer.

Dans ce cas de dysfonctionnement, l'hydro planeur adopte le comportement décrit par le diagramme d'état ci-dessous

### PRINCIPE DE PIVOTEMENT DU PLANEUR



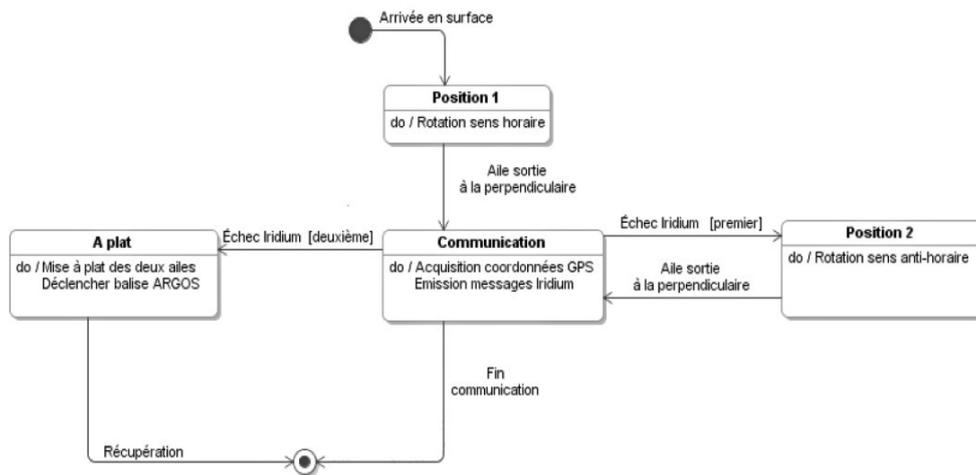
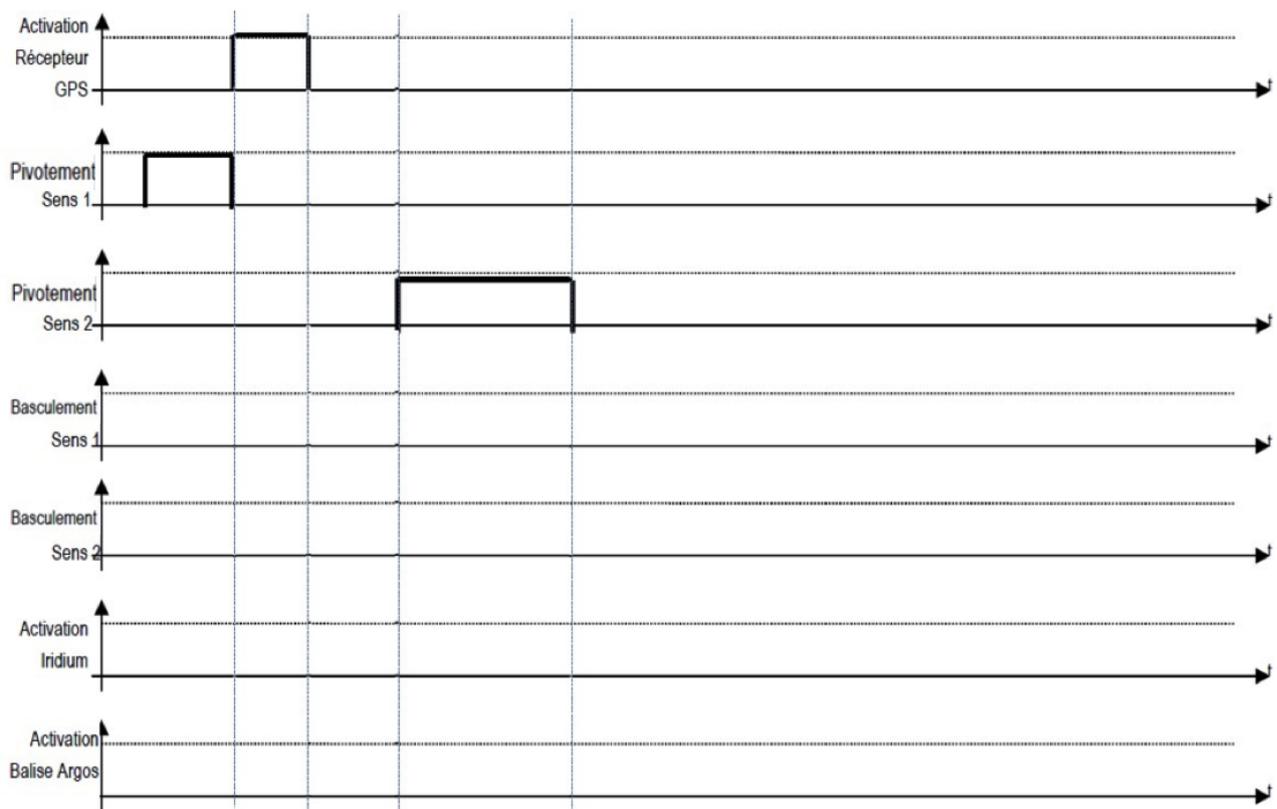


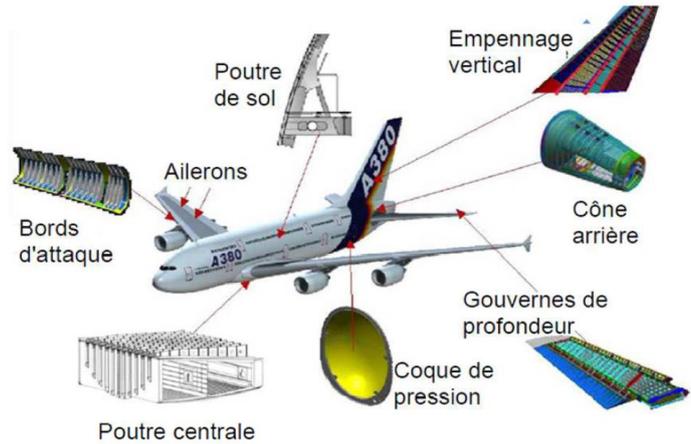
Diagramme d'état de la commande en cas de dysfonctionnement de l'hydro planeur

Compléter les chronogrammes qui correspondent à la séquence des signaux de commande fournis par l'unité de traitement pour obtenir le fonctionnement souhaité dans le cas où la première et la deuxième transmission IRIDIUM échouent (lorsqu'un élément doit être activé, il sera représenté par un niveau haut).

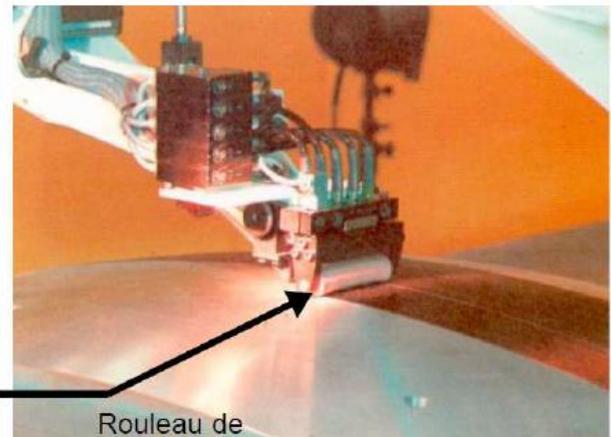


**Activité 21\*\*** Machine à draper

Dans les avions, de nombreuses pièces sont fabriquées en matériaux composites, c'est-à-dire en matériaux contenant plusieurs constituants différents. Pour fabriquer de telles pièces, on utilise des machines à draper. On s'intéresse donc à ce type de machine, dont la fonction est de déposer des bandes de carbone sur des panneaux qui interviennent dans la structure des avions.



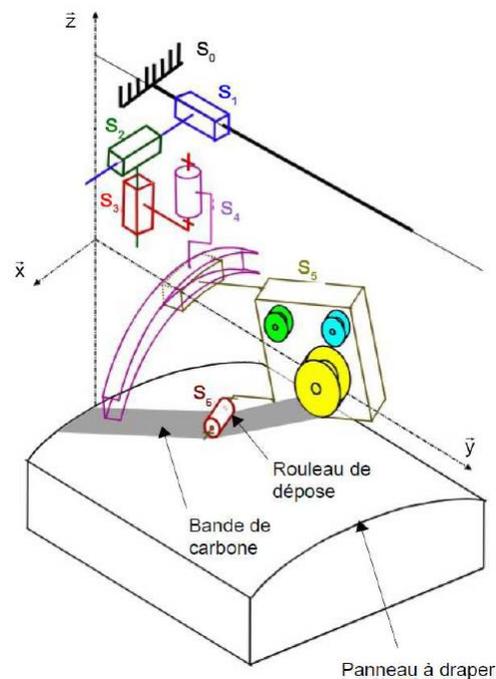
Panneaux à draper



Rouleau de dépose

Le rouleau de dépose est l'effecteur de cette machine à commande numérique. C'est un cylindre souple de diamètre de 30 mm et de largeur 160 mm.

Il se déplace le long du panneau à draper. Pour chaque épaisseur de carbone à déposer, le cycle de déplacement du rouleau est défini à l'avance par programme informatique et est interprété par l'ordinateur de commande de la machine au fur et à mesure de l'avancement de la dépose. La manière dont le rouleau de dépose peut bouger par rapport au bâti est illustrée sur la figure ci-contre.



Lors de la dépose de la bande de carbone sur le panneau, le rouleau doit exercer un effort presseur

pour la plaquer.

La modélisation de l'ensemble assurant le contact du rouleau sur l'outillage est donnée ci-après.

- 0 : unité de drapage
- 1 : corps du vérin
- 2 : tige du vérin
- 3 : bras
- 4 : support du rouleau
- 5 : rouleau

Toutes les liaisons sont considérées comme parfaites. L'action de la pesanteur est négligée.

Données :

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \frac{L}{2}\vec{x}_1, \quad \vec{AC} = L\vec{x}_1, \quad \vec{DB} = b\vec{x}_2, \\ \vec{CE} &= a\vec{x}_0, \quad \vec{OA} = c\vec{z}_0, \quad \vec{OA} = c\vec{z}_0, \\ \vec{OD} &= d\vec{z}_0, \quad (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta, \quad (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \beta. \end{aligned}$$

$$L = 400 \text{ mm}, \quad a = 35 \text{ mm}, \quad c = 150 \text{ mm}, \quad d = 675 \text{ mm}.$$

L'effort presseur est généré par un vérin pneumatique de piston d'aire  $S = 300 \text{ mm}^2$  dont la pression est asservie. La pression d'air disponible est de l'ordre de 10 bar.

On donne ci-dessous un extrait de cahier des charges.

exigence	critère	niveau
appliquer un effort lors de la dépose de la bande	effort presseur $F_p$	10 daN

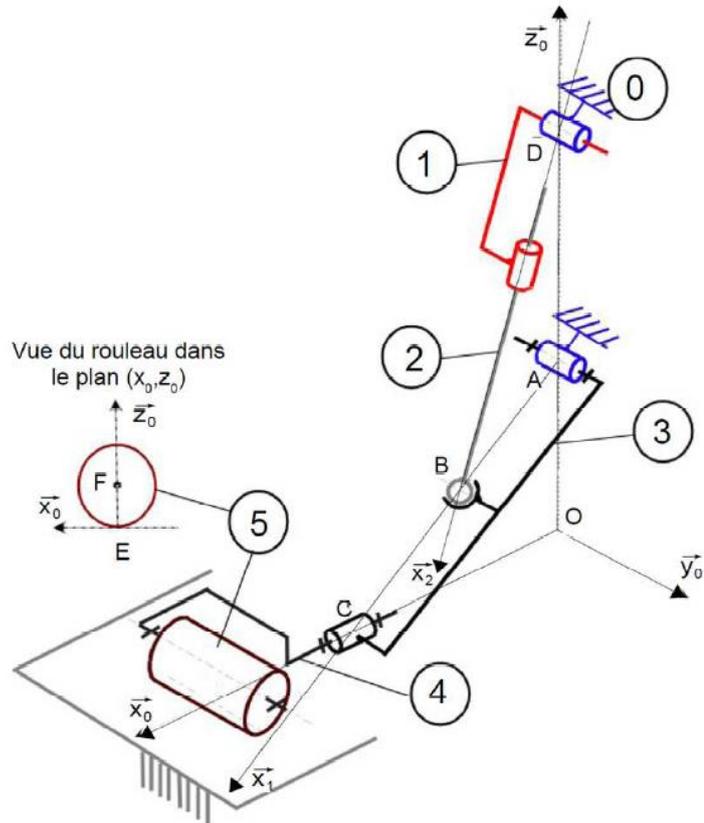
### Objectifs

- valider que la pression disponible permet de satisfaire l'exigence du cahier des charges ;
- vérifier le dimensionnement de la liaison entre 4 et 5.

1. Dessiner le schéma cinématique dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$  en indiquant le paramétrage angulaire.
2. Élaborer le graphe de structure.

Le problème peut être considéré comme plan.

3. Donner l'expression du torseur  $\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)$  dans la base 2,  $\mathcal{T}(0 \rightarrow 3)$  dans la base 0,  $\mathcal{T}(0 \rightarrow 5)$  dans la base 0 et  $\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)$  dans la base 2.
4. Isoler l'ensemble  $\{1, 2\}$  et déterminer les équations du PFS au point  $B$  en projection dans la base 2. En déduire la valeur des inconnues de liaison  $Z_{01}$  et  $Z_{32}$ . Pouvait-on prévoir ce résultat sans aucun calcul ?
5. Isoler l'ensemble  $\{3, 4, 5\}$  et déterminer les équations du PFS au point  $A$  en projection dans la base 0.



6. En déduire que  $\|\vec{R}(air \rightarrow 2)\| = \frac{(a + L \cos \theta)F_p}{\frac{L}{2} \sin(\beta - \theta)}$ .
7. Exprimer  $\tan \beta$  en fonction de  $d$ ,  $c$ ,  $L$  et  $\theta$ .
8. Calculer la valeur de  $\beta$  pour  $\theta = 22^\circ$ . En déduire la valeur de  $\|\vec{R}(air \rightarrow 2)\|$  lorsque l'effort presseur  $F_p$  est celui imposé par le cahier des charges.
9. Conclure vis-à-vis de la pression d'air disponible.

Afin de valider le dimensionnement de la liaison pivot entre 4 et 5, on cherche à vérifier que la pression de contact maximale dans cette liaison ne dépasse pas  $10 \text{ N/mm}^2$ . Une fois cette limite atteinte, il y a un risque de déformation ou de rupture du matériau. La géométrie de liaison est définie par son diamètre intérieur  $d_0 = 16 \text{ mm}$  et sa longueur  $L_0 = 20 \text{ mm}$ .

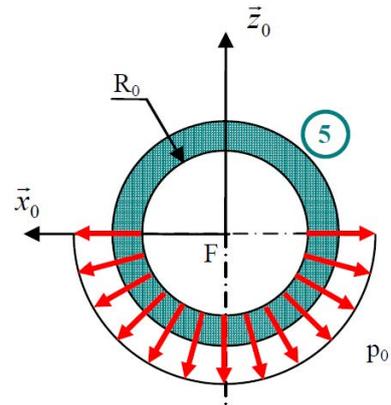
On suppose que l'action de 5 sur 4 est modélisée par le glisseur

$$\mathcal{T}(5 \rightarrow 4) = \begin{matrix} \\ F \end{matrix} \begin{cases} Z_{54} \vec{z}_0 \\ 0 \end{cases}$$

avec  $Z_{54} = 10 \text{ daN}$ .

La pression de contact  $p_0$  de 4 sur 5 est répartie de manière uniforme sur une surface de contact assimilable à un demi-cylindre.

1. Déterminer la valeur de  $p_0$ .
2. Conclure sur le dimensionnement de la liaison entre 4 et 5.



**Activité 22\* : correction de tilt d'optique adaptative** En instrumentation astronomique, un système d'optique adaptative (OA) permet de corriger les effets des turbulences de l'atmosphère. Celles-ci provoquent des fluctuations aléatoires de l'indice de réfraction des couches de l'atmosphère traversées par la lumière, et sont à l'origine des déformations des surfaces d'onde reçues par le télescope. Il en résulte non seulement une déformation instantanée des images, mais également un « flou » dû aux variations de la surface d'onde pendant le temps de pose. La Figure 1 ci-dessous compare deux images du centre galactique prises dans l'infrarouge, l'une sans correction (à gauche), l'autre avec correction par la première optique adaptative astronomique : le système « Pueo » du télescope Canada-France-Hawaï.

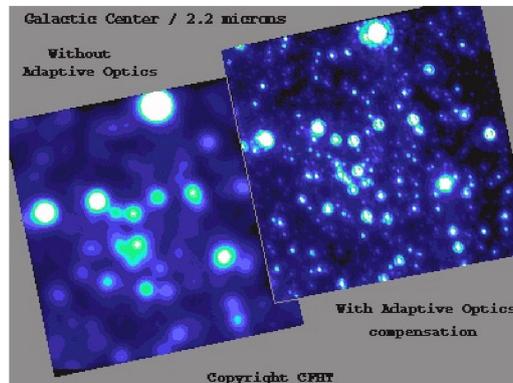


FIGURE 1 – Correction de turbulence par Optique Adaptative

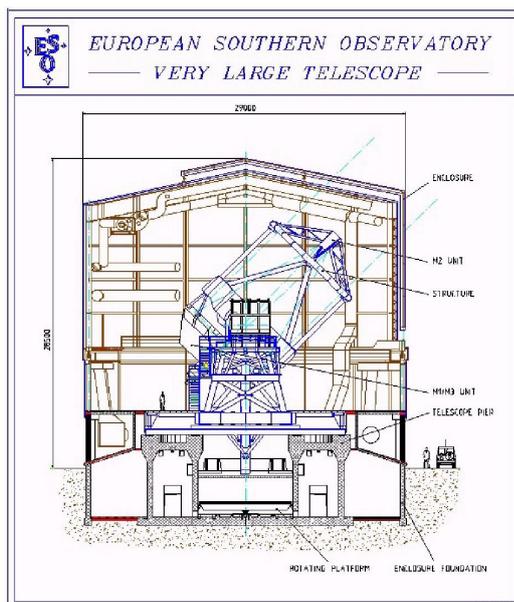


FIGURE 2 – Structure générale du VLT.

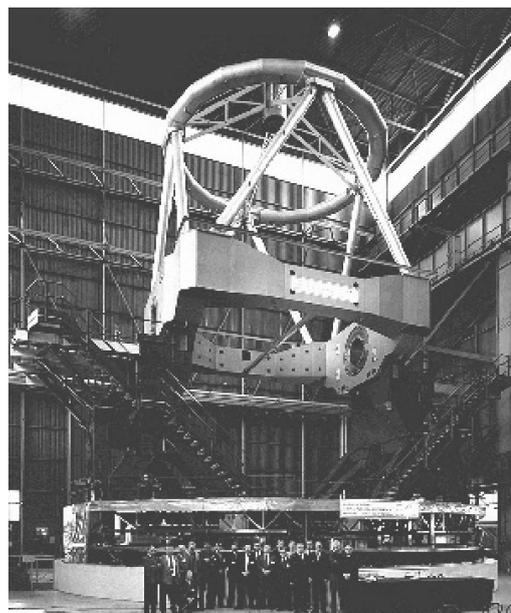


FIGURE 3 – Le VLT en cours de montage

Nous étudierons ici un sous-système de l'optique adaptative du Very Large Telescope européen (VLT) : cf. Figure 2 et Figure 3. Le schéma de principe d'une optique adaptative est présenté Figure 4 : la surface d'onde provenant de l'objet astronomique et déformée par l'atmosphère est reçue par les miroirs primaire puis secondaire du télescope. La lumière est séparée par une lame dichroïque (un miroir partiellement réfléchissant), et envoyée pour partie sur la caméra CCD où se forment les images, pour l'autre partie sur un analyseur de surface d'onde (ASO). Celui-ci fournit une estimation de la déformation de la surface d'onde. Un calculateur temps-réel en déduit les commandes à appliquer aux actionneurs de l'optique adaptative.

Pour des raisons de traitement du signal et de technologie des miroirs adaptatifs, on décompose la surface d'onde déformée en modes, c'est à dire qu'on la projette sur une base orthonormée de fonctions. Les premiers modes sont un « piston » (une constante, soit un mode d'ordre zéro), et deux basculements orthogonaux (modes d'ordre un) : tip-tilt en anglais et tilts en jargon technique de l'astronomie. Le mode piston est indifférent et n'est pas corrigé. Les tilts représentent 90% de l'énergie de déformation. Les modes d'ordre compris entre 2 et une valeur maximale choisie par les concepteurs peuvent être corrigés par un miroir déformable, dont la technologie est généralement à base de matériaux piézoélectriques. Ce miroir ne peut presque pas corriger les tilts. Il est donc bien préférable de confier cette fonction à un sous-système séparé commandant un miroir plan par deux rotations orthogonales. l'objet de cette étude est le système d'optique adaptative, et plus particulièrement le sous-système de correction de tilt (Tip-Tilt Mirror, ou TTM) conçu pour le VLT par le Département de Recherche Spatiale (DESPA) de l'Observatoire de Paris-Meudon.

L'asservissement de position angulaire du miroir doit satisfaire les performances énoncées dans le tableau 1 extrait du cahier des charges. L'objet de ce TD est de vérifier plus particulièrement le critère de précision.

Fonction de service	Critère	Niveau
FS1 : Corriger les défauts de tilt	Amplitude maximale	$5^\circ$
	Précision	$< 0,1\%$
	Rapidité	$t_R < 0,1 \text{ s}$
	Stabilité	stable

TABLE 1 – Extrait du CdCF.

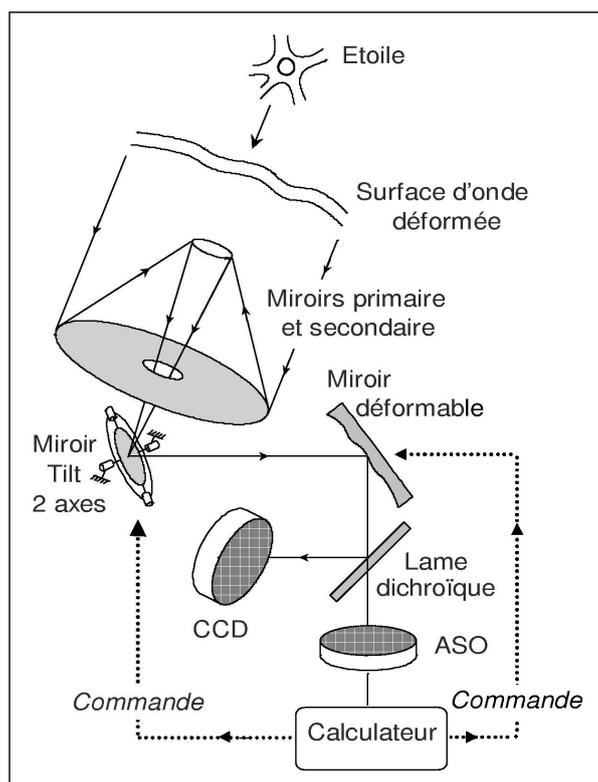


FIGURE 4 – Schéma de principe d'une optique adaptative

**Étude du système de correction de tilt** Le système de correction de tilt est détaillé sur la figure 5. Il comprend un système mécanique supportant le miroir, deux moteurs actionnant le système mécanique, un amplificateur de puissance, deux capteurs angulaires et diverses cartes électroniques réalisant des soustractions ou des transformations des signaux.

Des études pour chaque système ont permis de proposer des modèles de comportement pour chacun des éléments du système :

- le système mécanique peut-être modélisé par l'équation suivante :

$$\theta(t) + T \frac{d\theta}{dt}(t) + \frac{J}{k} \frac{d^2\theta}{dt^2}(t) = \frac{1}{k} C(t)$$

où  $\theta(t)$  est l'angle de rotation et  $C(t)$  est le couple moteur (raideur  $k = 24 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ , amortissement  $T = 10^{-3}$ , inertie  $J = 3,6 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ).

- le moteur électrique, alimenté par une intensité  $I_m$ , sera simplement modélisé par un gain :  $K_3 = 1.2 \text{ N.m}/\text{A}$ .
- l'amplification de puissance se comporte comme un gain  $K_2 = 0,1 \text{ A}/\text{V}$ .
- le capteur de position se comporte comme un gain  $K_4 = 4125 \text{ V}/\text{rad}$ .
- le correcteur PD (proportionnel-dérivé) est construit pour définir la loi entrée  $e_5$ —sortie  $s_5$  :

$$s_5(t) + T_5 \frac{ds_5}{dt}(t) = K_5 \frac{de_5}{dt}(t)$$

où  $T_5$  [s] et  $K_5$  [1] sont des constantes de réglage du système.

- Le correcteur PI (proportionnel-intégral) est construit pour définir la loi entrée  $\varepsilon_1$ —sortie  $e_2$  :

$$K_1 \left( \varepsilon_1(t) + T_1 \frac{d\varepsilon_1}{dt}(t) \right) = T_1 \frac{de_2}{dt}(t)$$

où  $T_1$  [s] et  $K_1$  [1] sont des constantes de réglage du système.

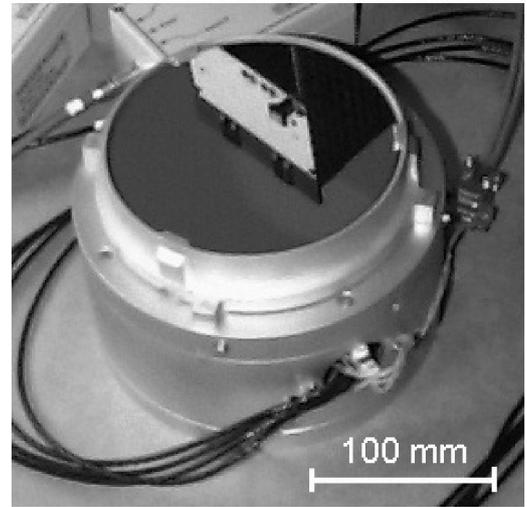
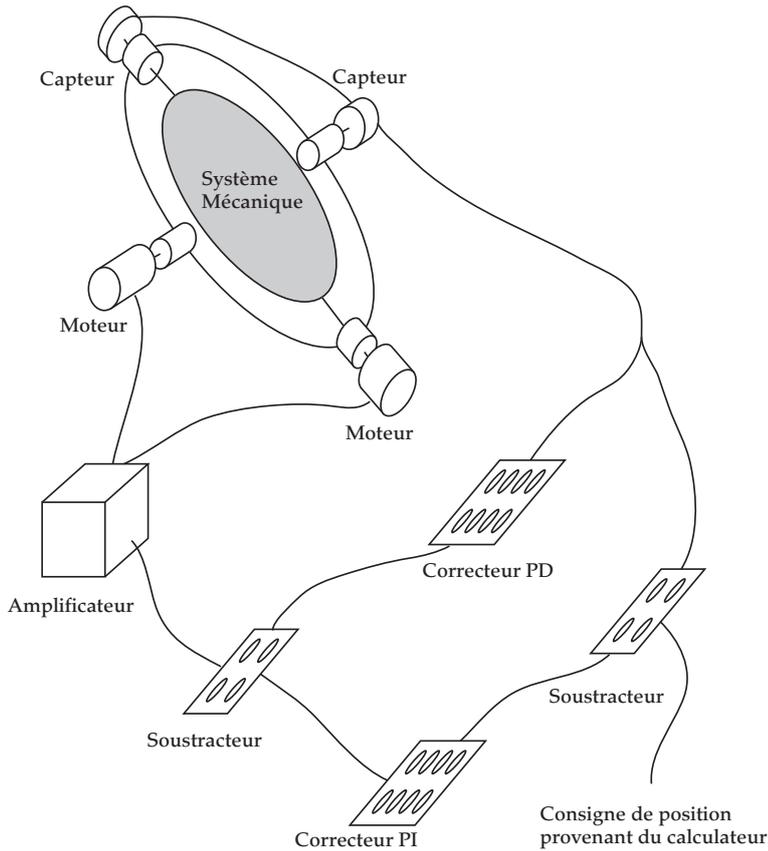


FIGURE 6 – Prototype du « Tip-Tilt Mirror » du VLT.

FIGURE 5 – Schéma de principe du correcteur de tilt.

- le convertisseur permet de fournir une image en volt de la consigne de position en radian. Il se comporte comme un gain indentique au capteur  $K_4 = 4125 \text{ V/rad}$ .

  1. Compléter le schéma bloc fonctionnel figure 7 décrivant le système en indiquant dans chaque boîte le nom du sous-système.
  2. Compléter les grandeurs d'entrée et de sortie de chaque boîte en précisant les unités des grandeurs.
  3. Calculer les transformées de Laplace des équations en supposant que le système est au repos à  $t < 0$  (Conditions initiales nulles).
  4. Déterminer les fonctions de transfert de chacun des composants. Proposer un nouveau schéma bloc contenant les fonctions de transfert.
  5. Modifier le schéma bloc obtenu pour obtenir un schéma bloc comportant deux boucles imbriquées l'une dans l'autre comme sur la figure 10. Déterminer les fonctions de transfert  $H_A$ ,  $H_B$ ,  $H_C$  et  $H_D$  (On pourra s'aider en remplissant le schéma intermédiaire de la figure 9).
  6. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte de la première boucle :  $FTBO_1(p)$  en fonction de  $H_B$  et  $H_C$ .
  7. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de la première boucle :  $FTBF_1(p)$  en fonction de  $H_B$  et  $H_C$ .
  8. Exprimer la réponse  $\theta(p)$  à une entrée  $E_2(p)$  en échelon de 1 V, en fonction de  $FTBF_1(p)$ . En déduire l'écart  $\varepsilon_2(p)$  pour la première boucle en fonction de  $H_B$  et  $H_C$ .
  9. L'entrée  $e_2$  et la sortie  $\theta$  n'étant pas dans la même unité, on adapte la notion de précision en considérant la première boucle précise si l'écart  $\varepsilon_2(t)$  converge vers 0. Déterminer si la première boucle est précise.

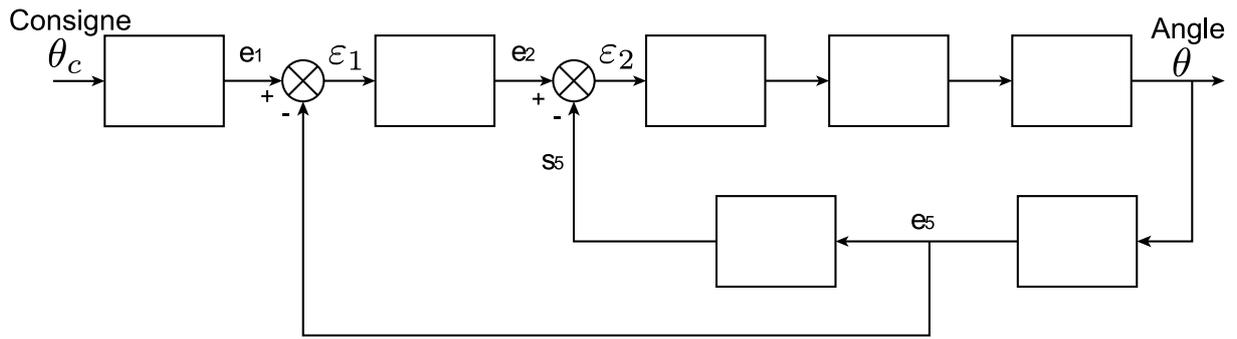


FIGURE 7 – Schéma bloc fonctionnel question 1

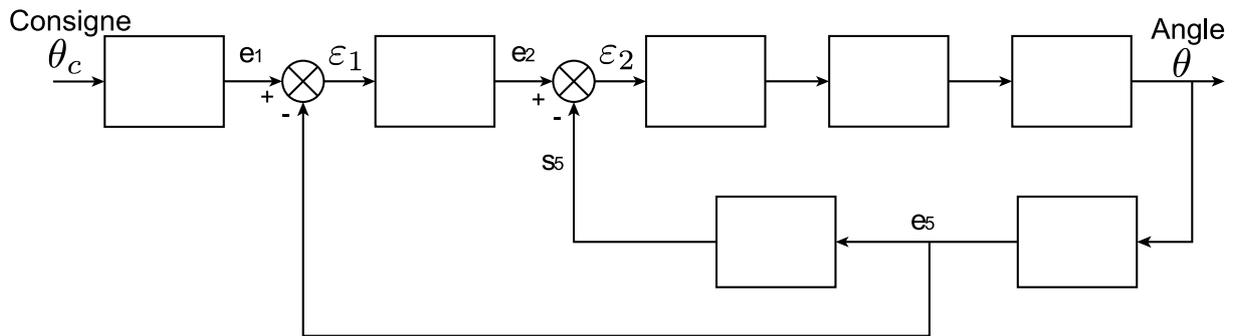


FIGURE 8 – Schéma bloc question 4

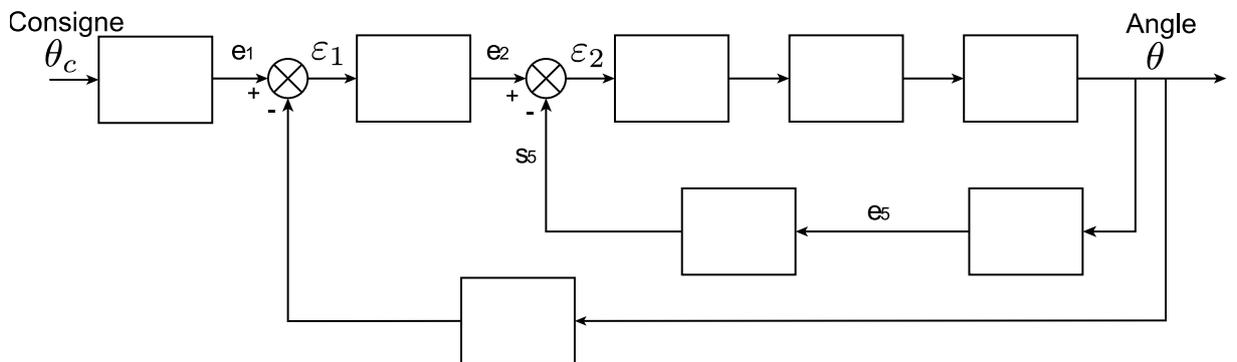


FIGURE 9 – Schéma bloc intermédiaire question 5

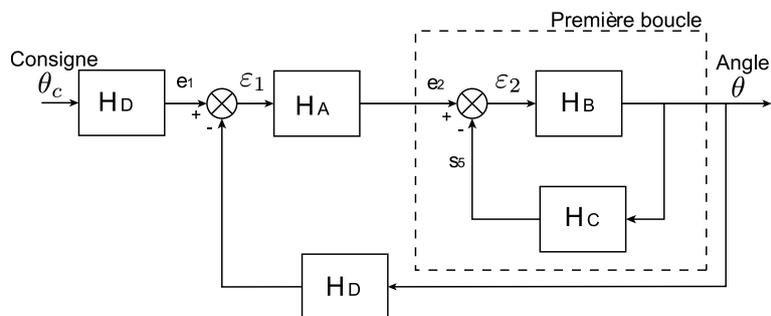


FIGURE 10 – Schéma bloc question 5

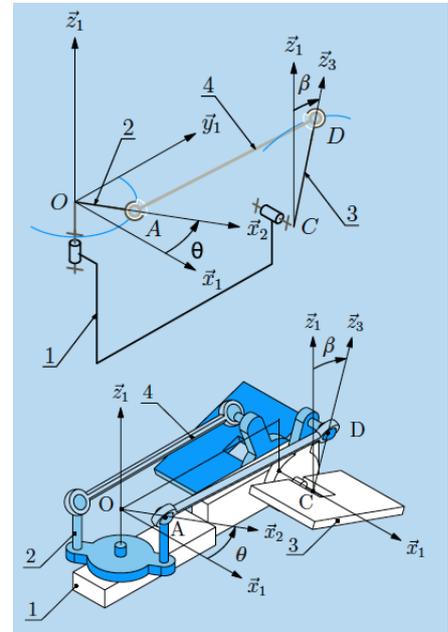
10. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du système complet :  $FTBF_2(p)$  en fonction de  $FTBF_1(p)$ ,  $H_A$  et  $H_D$ .
11. Calculer la limite de la réponse à l'échelon  $\theta_c(t) = \theta_0 U(t)$  quand  $t$  tend vers l'infini. Le système est-il précis ?

**Activité 23\*\* : réglage du roulis sur une fusée d'aéromodélisme**

Le réglage du roulis sur une fusée d'aéromodélisme est obtenu par les rotations opposées de deux ailettes par rapport au corps de la fusée. Le mécanisme de réglage utilise un servomoteur. Sur l'arbre moteur de celui-ci est lié un plateau moteur 2 qui entraîne deux biellettes 4 liées chacune à un plateau récepteur. Les ailettes sont fixées sur ces derniers.

On modélise un demi-mécanisme avec quatre solides :

- un support 1 auquel on associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . On pose  $\vec{OC} = a\vec{x}_1 + L\vec{y}_1 - b\vec{z}_1$  ;
- le plateau moteur 2, en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_1)$  avec le support 1 :
  - on associe un repère  $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$  à ce plateau et la rotation possible est paramétrée par l'angle  $\theta$ ,
  - on définit le point  $A$  par  $\vec{OA} = a\vec{x}_2$  ;
- un plateau récepteur 3, en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{x}_1)$  avec le support 1 :
  - on associe un repère  $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  à ce plateau et la rotation possible est paramétrée par l'angle  $\beta$ ,
  - on définit le point  $D$  par  $\vec{CD} = b\vec{z}_3$  ;
- une biellette 4 en liaison sphérique ce centre  $A$  avec le plateau moteur 2 et en liaison sphérique de centre  $D$  avec le plateau récepteur 3. On pose  $\vec{AD} = L\vec{u}_4$ .



L'objectif de ce problème est de trouver une relation entre  $\dot{\beta}$  et  $\dot{\theta}$ .

1. Réaliser le graphe de liaison du mécanisme et dénombrer les inconnues cinématiques.
2. Définir les torseurs cinématiques associés aux liaisons et tracer les figures de définition des angles  $\beta$  et  $\theta$ .
3. Trouver une équation scalaire qui évite les inconnues cinématiques des deux liaisons sphériques
4. En déduire l'expression de  $\dot{\beta}$  en fonction de  $\dot{\theta}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $L$ ,  $\theta$  et  $\beta$ .
5. Simplifier cette expression lorsque les angles  $\theta$  et  $\beta$  restent petits devant 1.

**Activité 24\*\* : train d'atterrissage de Rafale** – On se propose d'étudier le comportement de l'atterrisseur principal d'un avion lors de l'impact au niveau du sol. Cet atterrisseur est fixé à la structure de l'avion aux points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et le centre de la roue est situé en  $H$  (figure [I1](#) et [I2](#)).

Le montage du train peut être modélisé de la façon suivante :

- Le bras d'articulation (4) est en liaison avec la cellule (1) de l'avion par une liaison sphérique en  $A$  et une liaison sphère-cylindre d'axe parallèle à  $\vec{x}_0$  en  $B$  ;
- la contrefiche (3) est en liaison sphérique en  $A$  sur le bras d'articulation (4) et en  $G$  sur la jambe (2) ;

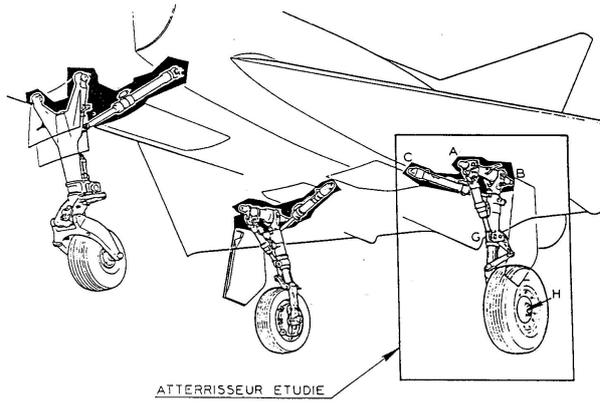


FIGURE 11 – Trains d’atterrissage du Rafale

Coordonnées des points :

- $A ( 400 , 0 , 900 )$
- $B ( -150 , 0 , 900 )$
- $C ( -150 , -900 , 900 )$
- $D ( 0 , 0 , 900 )$
- $E ( 0 , 0 , 600 )$
- $F ( -150 , 0 , 600 )$
- $G ( 0 , 0 , 300 )$
- $H ( 0 , 150 , 0 )$

Les cotes sont données en mm dans le repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

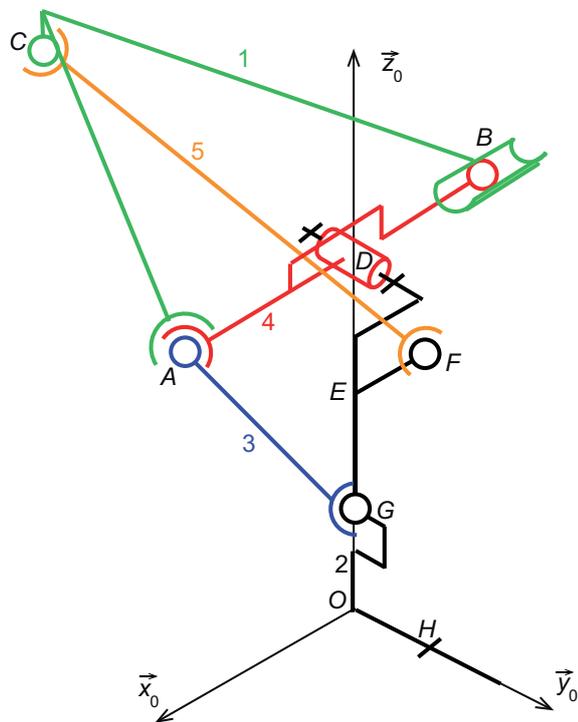


FIGURE 12 – Modélisation du train d’atterrissage du Rafale.

- la contrefiche (5) est en liaison sphérique en  $C$  sur la cellule (1) et en  $F$  sur la poutre  $EF$  ;
- les poutres  $EF$  et  $OH$  sont encastées en  $E$  et  $O$  sur la jambe (2) ;
- la jambe (2) est liée au bras d’articulation (4) par une liaison pivot d’axe  $(D, \vec{y}_0)$ .

Le cas de charge correspond à celui d’un atterrissage symétrique. Pour effectuer les calculs, on considère que :

- les points d’attache  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont fixes par rapport à la cellule ;
- on néglige les efforts d’inertie (statique) ;
- les actions exercées par la roue sur la jambe sont modélisées par le torseur :

$$\mathcal{T}(R \rightarrow 2) = \begin{matrix} \vec{F} \\ H \\ 0 \end{matrix}$$

Les composantes de  $\vec{F}$  dans le repère  $R_0$  sont  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$ . Elles ont pour valeurs  $F_x = -4\,000$  N,  $F_y = 0$  et  $F_z = 6\,000$  N.

Pour une étude de dimensionnement des contrefiches, on souhaite déterminer les efforts auxquels elles sont soumises. On souhaite aussi déterminer les actions du train sur la cellule (1) aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

1. Proposer une analyse du système sous forme de graphe de structure détaillé.
2. Proposer une démarche claire permettant de déterminer les efforts recherchés. On indiquera pour chaque isolement les inconnues prévues et les équations utilisées.
3. Développer les calculs pour obtenir les résultats attendus sous forme littérale.
4. Réaliser l'application numérique.

**Activité 25\* : radar météorologique bande X<sup>H</sup>** – Le radar météorologique est un outil d'aide à l'analyse et à l'observation des masses nuageuses. Il offre une large couverture spatiale et des mesures à haute résolution spatio-temporelle des champs de pluie en temps réel. Son utilisation s'est fortement développée dans les années qui suivirent la fin de la seconde guerre mondiale. Depuis, leur utilisation étant particulièrement intéressante pour les mesures hydrologiques, leur technique n'a cessé d'évoluer. Avec la constitution du réseau NEXRAD, en 1998, sur le continent Nord américain fort de ses 160 radars et du réseau ARAMIS de Météo France avec ses 14 radars, de gros efforts sont menés pour améliorer les techniques d'estimation et de prévision à courte échéance des pluies par radar.

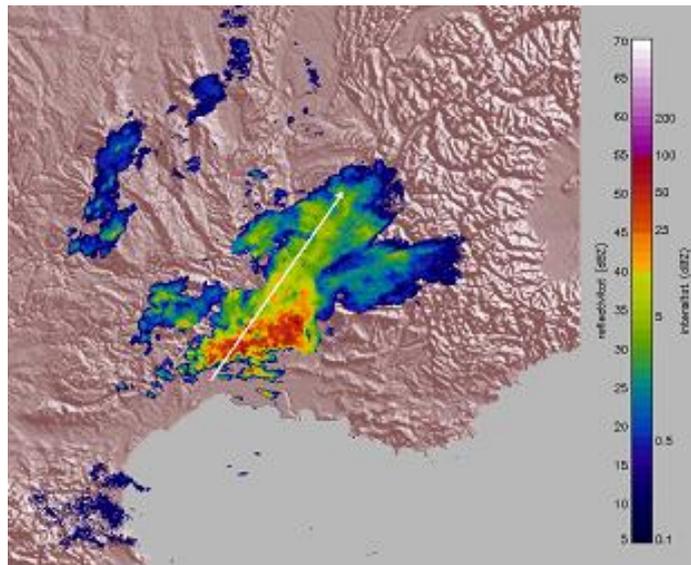


FIGURE 13 – Photographie du radar bande X à gauche. Cartographie des zones nuageuses dans le sud de la France réalisée par le radar à droite.

**Principes** – À intervalles de temps réguliers, le radar émet dans l'atmosphère des ondes électromagnétiques de forte puissance, de durée très brève et de fréquence très élevée. L'énergie contenue dans cette onde est concentrée par une antenne directive. Toutes les cibles qui se trouvent à l'intérieur du faisceau interceptent une partie de l'onde émise. Cette puissance incidente est alors en partie absorbée par la cible, et rayonne dans toutes les directions. La fraction du signal qui retourne vers l'antenne est le signal utile à la détection.

1. Adapté du sujet du concours CCP 97

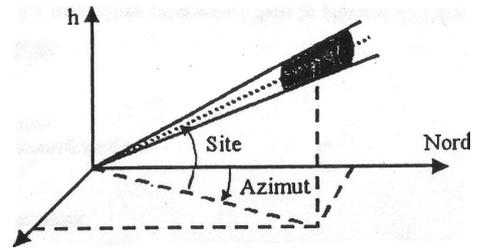
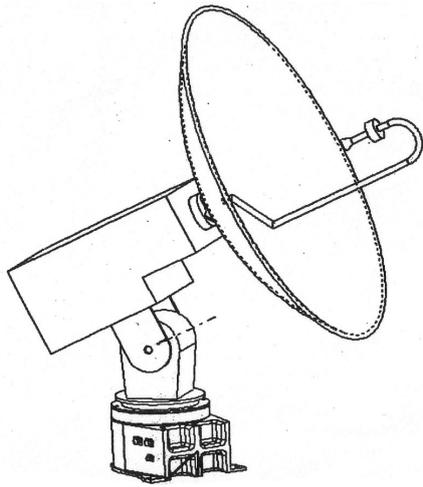


FIGURE 14 – Illustration du radar bande X et paramétrage de son orientation.

Sur quelques centaines de kilomètres, on admet que l'onde se propage en ligne droite à la vitesse constante de la lumière ( $c = 3 \times 10^8$  m/s). L'orientation de l'antenne et le temps écoulé entre l'émission de l'onde et le retour de la puissance réfléchie permettent de localiser la cible en direction et distance.

L'antenne balaye l'atmosphère suivant deux axes de rotation : une rotation d'axe verticale permet de définir la position "azimut" et une rotation d'axe horizontal qui règle la position "site".

Le radar se compose de deux parties. Le premier ensemble est constitué de l'émetteur-récepteur hyperfréquence, du processeur BITE (Build In Test Equipement) et du piédestal positionneur. Il s'implante à l'extérieur. Le second élément est l'ensemble de calcul et de pilotage.

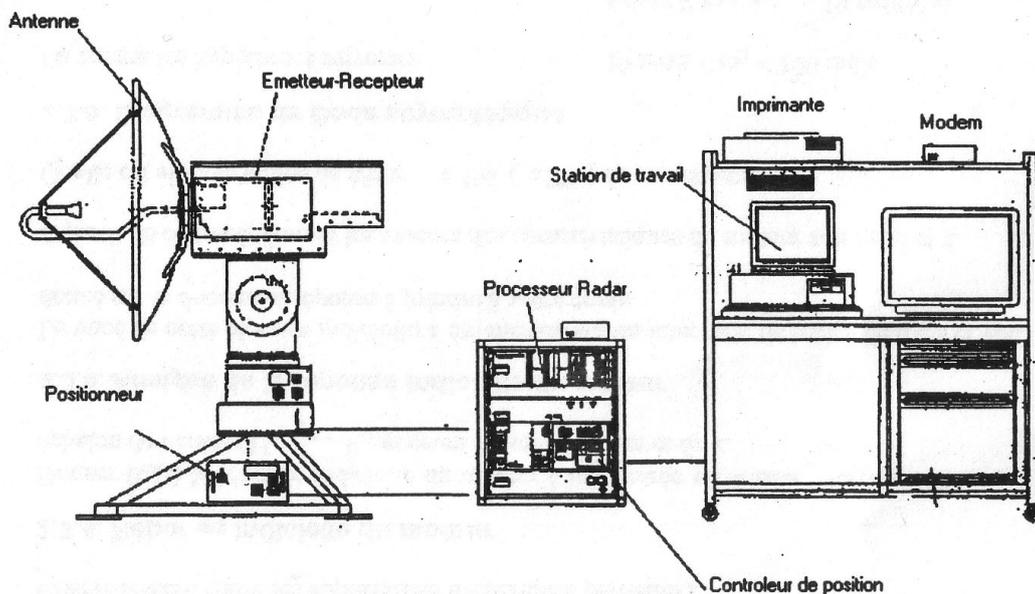


FIGURE 15 – Équipement associé au radar bande X

L'émetteur-récepteur est de type non cohérent. Un magnétron fournit les ondes hyperfréquences à 9,375 GHz. Sa puissance crête est de 25 kilowatts durant  $2 \mu s$  avec une fréquence de récurrence à 500 Hz. L'antenne parabolique de 1,20 mètres est montée collée au capteur. Le tout est posé au

sommet du piédestal positionneur.

Le positionneur permet de déplacer l'ensemble du bloc aérien suivant l'axe des azimuts et l'axe des sites. La vitesse maximale des deux articulations est de deux tours par minutes, leur position est en permanence connue. Les rotations autour de l'axe des azimuts sont sur  $360^\circ$  en continu. En site, l'antenne se positionne entre  $-2^\circ$  et  $90^\circ$ . Aux extrémités de cet intervalle, des butées à contact électrique permettent de garantir la sécurité des mouvements.

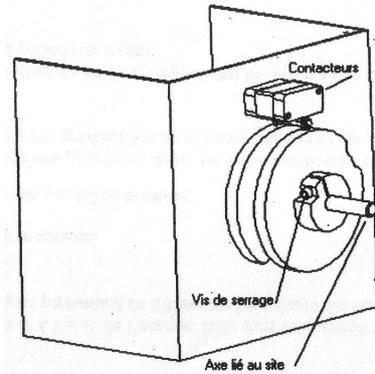


FIGURE 16 – Description du système de détection de fin de course.

Le second ensemble est composé des éléments de calcul et de visualisation du radar. Ces éléments sont placés dans une pièce tempérée. On trouve la station de travail, le processeur radar, le processeur de signal vidéo et le contrôleur de position. L'interface utilisateur s'exécute sur la station de travail. Elle permet au manipulateur de contrôler le radar, de définir la séquence d'acquisition et de visualiser et sauvegarder les données.

**Étude de la fonction : Suivi de pilotage du site** L'objectif de cette partie est de déterminer les paramètres intervenant dans le pilotage de l'axe de rotation du site. Pour cette étude, on utilisera le paramétrage présentés figure 17.

Pour simplifier l'étude, le radar est modélisé par trois éléments : le piédestal 0, l'arbre de rotation azimut 1 et l'émetteur-récepteur noté 2 comprenant la parabole fixée sur l'axe  $IB$ . Une masse 3 fixée sur 2 en  $B$  assure le rôle de contrepoids. L'arbre 1 est en rotation par rapport au piédestal 0, l'angle azimut est noté  $\alpha$ . L'émetteur-récepteur 2 est en rotation par rapport à l'arbre 1, l'angle site est  $\beta$ .

**Étude géométrique** Tous les repères utilisés sont des repères orthonormés directs.

Le repère  $R_0(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$  est lié au piédestal 0, de base associée  $B_0(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ .

Le repère  $R_1(A, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$ , lié à l'arbre 1, est en rotation autour de l'axe  $(O, \vec{z}_0)$ .

Le repère  $R_2(A, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$ , lié à l'émetteur 2, est en rotation autour de l'axe  $(A, \vec{x}_1)$ .

Les liaisons entre ces solides sont telles que :  $\vec{Z}_0 = \vec{Z}_1$  et  $\vec{X}_1 = \vec{X}_2$ .

La géométrie du radar est donnée par :  $OA = h$ ,  $AC = CP = a$  et  $BC = b$ .

1. Sur quelle surface se déplace le centre  $P$  de la parabole ?
2. Compte tenu des positions limites admissibles pour les angles d'azimut et de site, préciser si le point  $P$  possède un paramétrage unique dans toute la zone de couverture du radar.
3. Décrire en quelques phrases le fonctionnement ainsi que la procédure de réglage des butées électriques qui assurent la limitation de la rotation de l'axe de site (figure 16).
4. Déterminer la position du point  $B$  par rapport au repère  $R_0$ . Le résultat doit être exprimé de manière concise.

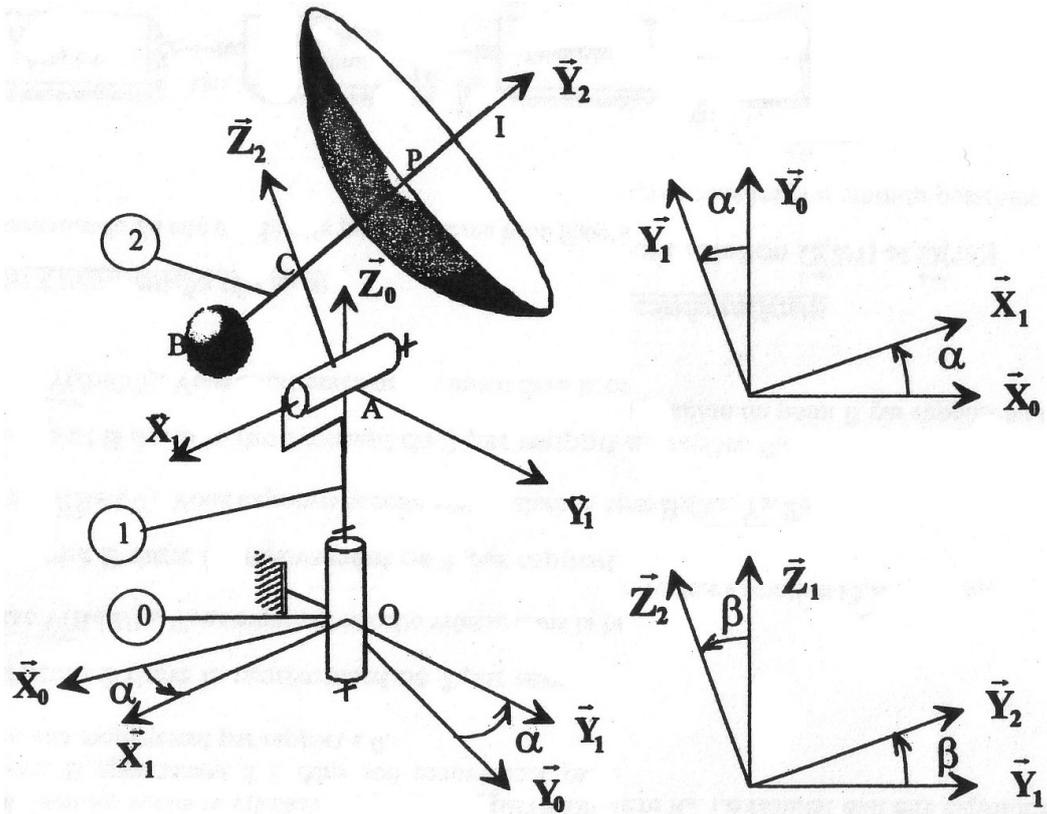


FIGURE 17 – Schéma cinématique du radar bande X.

### Étude cinématique

5. Donner l'expression des torseurs cinématiques  $\mathcal{V}(2/1)$  et  $\mathcal{V}(1/0)$ .
6. En déduire l'expression de  $\mathcal{V}(2/0)$ .
7. Déterminer la vitesse  $\vec{V}(B, 2/0)$ .
8. Retrouver ce résultat par dérivation du vecteur position.

**Étude de la commande du site** La structure de commande du site est décrite par le schéma bloc fonctionnel de la figure 18.

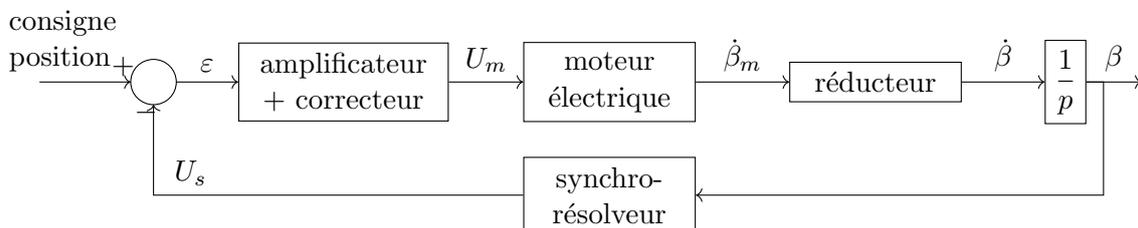


FIGURE 18 – Schéma bloc de l'asservissement de position du radar.

9. Pour le moto-réducteur utilisé dans cette chaîne fonctionnelle, de quel type d'asservissement s'agit-il? (justifier la réponse en donnant la grandeur mesurée par le synchro-résolveur)

Les différents éléments de la chaîne fonctionnelle sont définis de la manière suivante :

- l'ampli-correcteur est un gain pur de valeur :  $K_a = 2$  (grandeur sans dimension) ;
  - le réducteur est un gain pur de valeur :  $K_r = 1/20$  (grandeur sans dimension) ;
  - le syncho-résolver est un gain pur de valeur :  $K_s = 10$  V/rad ;
  - le moteur se comporte comme un système d'ordre 1 de constante de temps  $\tau$  et de gain  $K_m$  :  $H_m(p) = K_m/(1 + \tau p)$ . On posera  $\omega_0 = 1/\tau$ .
10. Tracer le schéma bloc opérationnel de cet asservissement.
  11. Donner les fonctions de transfert en chaîne directe  $FTCD(p)$ , en boucle ouverte  $FTBO(p)$  et en boucle fermée  $FTBF(p)$  relatives à cet asservissement.
  12. Déterminer la réponse indicielle  $\dot{\beta}_m(t)$  du moteur à une entrée en tension  $U_m(t)$  de la forme d'un échelon de hauteur  $U_0 = 10$  V, en fonction de  $K_m$  et  $\tau$ .

Le tracé de cette réponse indicielle a été mesuré sur un intervalle de temps de 0.1 s et vous est donné sur la figure .

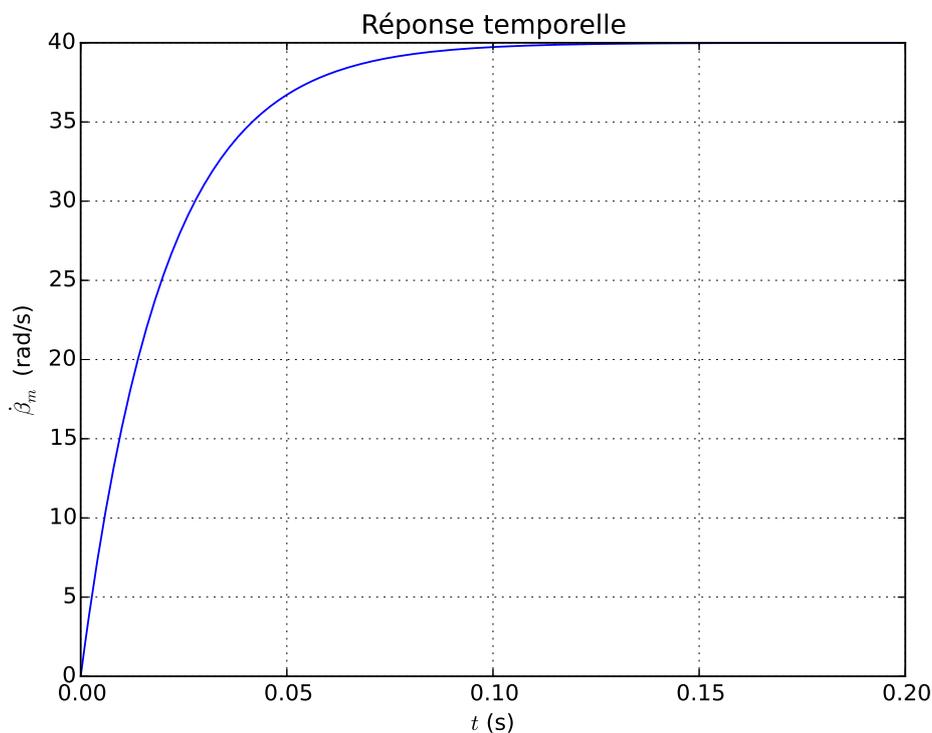


FIGURE 19 – Réponse indicielle du moteur soumis à un échelon de tension.

13. À partir de ce tracé, donner les valeurs des caractéristiques  $K_m$  et  $\tau$  du moteur. Quelle est alors le temps de réponse à 5 % de ce système ( $tr_{5\%}$ ) ?

On adopte les hypothèses suivantes :

- $10 \text{ rad/s} < \omega_0 < 100 \text{ rad/s}$  ;
- $1 \text{ rad/V/s} < K_m < 10 \text{ rad/V/s}$ .

14. Tracer le diagramme asymptotique de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement proposé avec  $FTBO(p) = U_s(j\omega)/\varepsilon(j\omega)$ .

On représentera quatre décades ( $0, 1 \text{ rad/s} < \omega < 1000 \text{ rad/s}$ ).

Calculer la phase effective de cette fonction de transfert pour la valeur  $\omega = \omega_0$  de la pulsation ?

Une analyse expérimentale fréquentielle des constituants de l'axe nous permet de tracer le diagramme de Bode en boucle ouverte du processus (fig 21). Celui-ci fournit le gain et le déphasage entre  $U_s(t)$  et  $s(t)$  pour différentes valeurs de la pulsation  $\omega$ .

15. Sur le diagramme fournit et à l'aide de l'analyse faite dans la question précédente, proposer les constructions graphiques permettant de déterminer les valeurs des constantes du moteur, à savoir  $\omega_0$ ,  $\tau$  et  $K_m$ . Préciser les valeurs de ces constantes.
16. À l'aide du diagramme de Bode précédent, tracer sur le document réponse figure 20 l'allure de la réponse fréquentielle  $U_s(t)$  en superposition de  $\varepsilon(t)$ . Indiquer sur le tracé les différentes valeurs remarquables.

On rappelle que le signal d'entrée est ici en régime établi :  $s(t) = \sin(\omega t)$  avec  $\omega = 2\pi/T$  où  $T$  représente la période du signal.

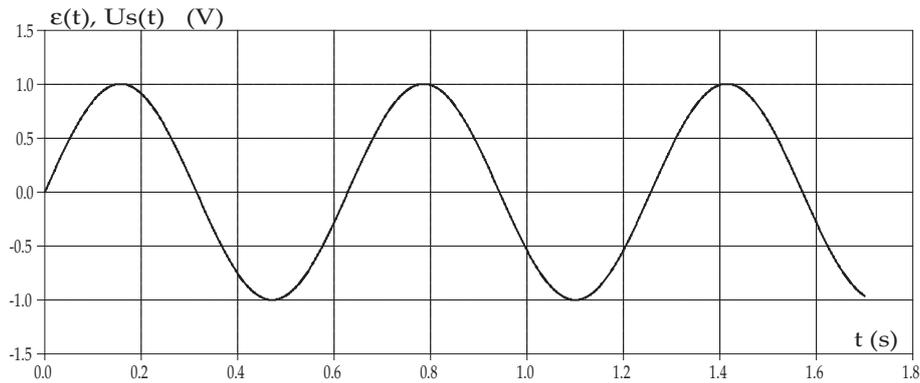


FIGURE 20 – Document réponse : Réponse harmonique  $U_s(t)$ .

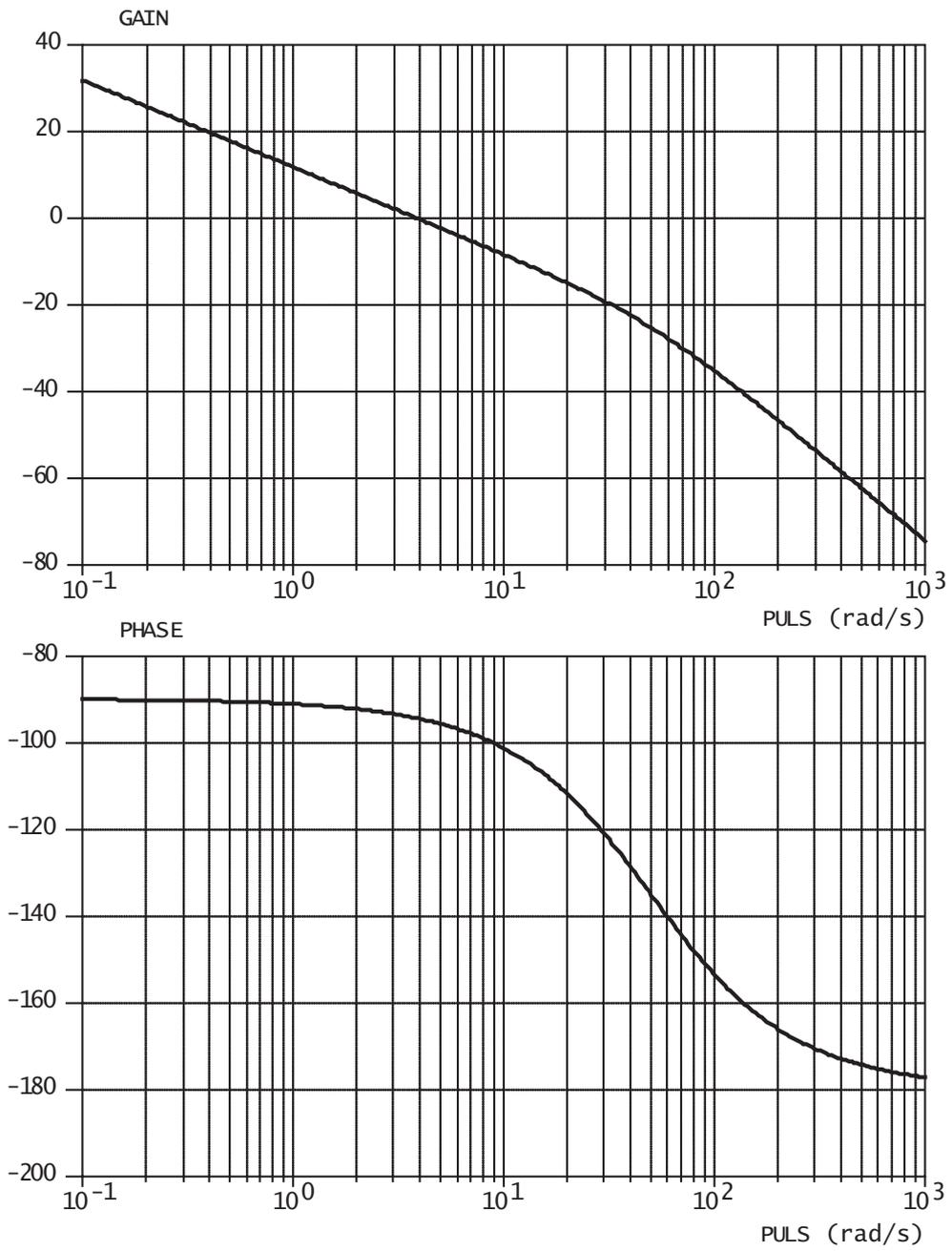


FIGURE 21 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte.

## Quelques questions dont il est bon de connaître la réponse

Cours	Questions
Introduction à l'ingénierie système	<p>Définir, en quelques mots, ce qu'est un système dans le domaine des sciences industrielles de l'ingénieur.</p> <p>Indiquer les informations contenues dans le diagramme des cas d'utilisation.</p> <p>Indiquer les informations contenues dans le diagramme des exigences.</p> <p>Proposer un exemple différent de ceux vus en classe précisant la notion de critère et de niveau d'une exigence.</p> <p>Donner le nom du document dans lequel sont inscrites toutes les informations sur les performances attendues d'un système.</p>
Analyser la structure d'un système complexe	<p>Donner la structure CE/CI.</p> <p>Donner la fonction et la famille de chaque constituant (préactionneur,...) et indiquer les flux d'énergie ou d'information.</p> <p>Donner deux exemples d'actionneurs très couramment utilisés.</p> <p>Indiquer les informations contenues dans le diagramme de blocs internes.</p>
Introduction aux systèmes automatisés	<p>Exprimer le besoin à l'origine de la conception des systèmes automatisés.</p> <p>Citer les 3 types de systèmes automatisés et expliquer rapidement leur différence.</p>
Performances des systèmes continus Modélisation des SLCI	<p>Citer les 3 types de performances évaluées sur les systèmes continus, ainsi que les critères permettant de les mesurer.</p> <p>Donner la définition de l'erreur. Indiquer la différence entre l'erreur statique et l'erreur de poursuite.</p> <p>Donner la définition du temps de réponse à 5 %.</p> <p>Donner les expressions du dépassement absolu et du dépassement relatif.</p> <p>Citer les 4 signaux test utilisés pour évaluer les performances des systèmes continus.</p> <p>Indiquer l'intérêt d'utiliser la transformation de Laplace.</p> <p>Donner les transformées des fonctions suivantes :</p> $\alpha f(t) + \beta g(t), f'(t), f''(t), \int_0^t f(x)dx, K, Kt, \exp(-at), t \exp(-at)$ <p>Énoncer les théorèmes de la valeur initiale et finale ainsi que du retard.</p>
Représentation des SLCI	<p>À quoi correspond la fonction de transfert d'un système ou d'un constituant ?</p> <p>Donner le nom des racines du numérateur et des racines du dénominateur d'une fonction de transfert.</p> <p>Donner la méthode permettant d'obtenir la forme canonique d'une fonction de transfert.</p> <p>Représenter par un schéma-bloc la structure générale d'un système asservi.</p> <p>Un système asservi est-il toujours bouclé ? La réciproque est-elle vraie ? Donner un exemple.</p> <p>Donner la différence entre un système régulateur et un système suiveur.</p>
Simplification des schémas-blocs	<p>Donner l'expression de la FTBF avec son schéma bloc correspondant.</p> <p>Comment détermine-t-on la sortie d'un système à <math>n</math> entrées ?</p> <p>Que faut-il faire pour isoler des boucles initialement imbriquées ?</p> <p>Comment faut-il faire pour changer les signes d'un comparateur ?</p>
Calcul vectoriel	<p>Indiquer la méthode pour réaliser une figure de changement de bases ?</p> <p>Donner les projections des vecteurs <math>\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{y}_1</math> dans les bases <math>B_0</math> et <math>B_1</math> sachant que <math>\vec{z}_0 = \vec{z}_1</math> et <math>\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)</math>.</p> <p>Donner la définition d'un produit vectoriel.</p> <p>Expliquer les 3 cas que l'on peut rencontrer lorsque l'on effectue le produit vectoriel de vecteurs unitaires.</p> <p>Donner les méthodes utilisées pour trouver le résultat rapidement.</p>

Cours	Questions
Dérivation vectorielle – Champ des vecteurs vitesse – Composition des vecteurs vitesse – Torseur cinématique	Expliquer la notion de trajectoire. Quelles sont les trajectoires des points d'un solide en mouvement de translation rectiligne, en mouvement de rotation. Donner la relation permettant de déterminer $\vec{a}(B, 2/0)$ . Donner la relation qui permet de déterminer la dérivée, par rapport au temps, d'un vecteur unitaire $\vec{z}_2$ dans un repère $R_0$ . Comment détermine-t-on $\vec{v}(B, 2/0)$ par une autre méthode que la dérivation du vecteur position. Donner, dans le cas général, l'expression du torseur cinématique.
Mouvements particuliers	Donner les résultats de cinématique à connaître dans le cas d'un mouvement de translation, de rotation
Liaisons - Schéma cinématique	Pourquoi parle-t-on de liaisons parfaites ? Donner la définition d'un degré de liberté pour une liaison. Donner le torseur cinématique ainsi que les symboles des liaisons normalisées. Comment identifie-t-on le type de liaison entre 2 solides ?
Liaisons - Schéma cinématique - Liaisons équivalentes	Donner le torseur cinématique, sa zone de validité ainsi que les symboles des liaisons normalisées. . . Quel est l'intérêt du schéma cinématique ? Donner la démarche pour obtenir un schéma cinématique ? Dans quel cas parle-t-on de graphe des liaisons minimal et de schéma cinématique minimal ? Que vaut le torseur de la liaison équivalente pour des liaisons en série. Que vaut le torseur de la liaison équivalente pour des liaisons en parallèle.
Loi E/S par fermeture géométrique	Expliquer la méthode pour déterminer la loi E/S par fermeture géométrique. Donner l'astuce qui permet souvent d'éliminer un des paramètres de mouvement des équations obtenues.
Loi E/S par fermeture cinématique	Expliquer la méthode pour déterminer la loi E/S par fermeture cinématique. Indiquer la « stratégie » à utiliser pour obtenir directement une relation ne faisant apparaître que les paramètres désirés. Donner les 3 cas pour calculer un produit scalaire.
Loi E/S à l'aide d'une particularité angulaire	Expliquer la méthode pour déterminer la loi E/S à l'aide d'une particularité angulaire. Donner la fonction d'un joint de Cardan. Indiquer la particularité d'une transmission de mouvement par un tel dispositif.
Loi E/S pour les réducteurs et multiplicateurs de vitesse à train simple	Définir le rapport de transmission. Définir le « pas » d'une roue dentée. Définir le module. Indiquer la condition nécessaire pour que 2 roues dentées puissent engrener ensemble. Donner les 2 relations qui utilisent le module. Donner les différents types d'engrenages et les rapports de transmission associés. Donner le rapport de transmission d'un train d'engrenage simple.
Loi E/S pour les réducteurs et multiplicateurs de vitesse à train épicycloïdal	Expliquer la différence entre un train épicycloïdal et un train simple. Définir : planétaire, satellite et porte satellite. Donner la relation de Willis. Expliquer son utilisation. Donner un exemple ou une condition géométrique entraînant une relation sur le nombre de dents des différents éléments.

Cours	Questions
Comportement temporel des SLCI proportionnel, dérivateur, intégrateur et du 1 <sup>er</sup> ordre	<p>Donner les fonctions de transfert des systèmes proportionnels, intégrateur et dérivateur.</p> <p>Donner les graphes représentant leur réponse temporelle à différentes sollicitations.</p> <p>Donner la fonction de transfert d'un système du 1<sup>er</sup> ordre ainsi que ses paramètres caractéristiques.</p> <p>Donner les 3 graphes représentant sa réponse temporelle à différentes sollicitations. Indiquer les points caractéristiques sur ces graphes.</p> <p>Donner l'expression du temps de réponse d'un système du 1<sup>er</sup> ordre.</p>
Comportement temporel des SLCI du 2 <sup>e</sup> ordre	<p>Donner la fonction de transfert d'un système du 2<sup>e</sup> ordre ainsi que ses paramètres caractéristiques.</p> <p>Donner les 3 graphes représentant sa réponse temporelle à différentes sollicitations. Indiquer les points caractéristiques sur ces graphes.</p> <p>Dans quel cas la sortie d'un système du 2<sup>e</sup> ordre présente t'elle des oscillations amorties ?</p> <p>On désire un temps de réponse le plus faible possible pour un système du 2<sup>e</sup> ordre. Que faut-il faire ? Deux cas sont à envisager.</p> <p>Comment détermine-t-on le temps de réponse pour un système du 2<sup>e</sup> ordre ?</p> <p>Que vaut le temps de réponse réduit pour <math>\xi = 0,69</math> et <math>\xi = 1</math> ? Quelles sont ses unités ?</p> <p>Donner l'expression qui permet de quantifier un dépassement relatif.</p> <p>Combien y a t-il de dépassement <math>&gt;1</math> % pour le cas <math>\xi = 0,69</math> ? Donner leur valeur ?</p> <p>Donner les expressions de la période et de la pulsation amortie pour un 2<sup>e</sup> ordre dont la réponse est oscillatoire amortie.</p> <p>À quelles instants, les 3 premiers dépassements s'effectuent pour un 2<sup>e</sup> ordre dont la réponse est oscillatoire amortie.</p>
Identification temporelle des SLCI	<p>Suite à un essai avec une entrée de type échelon, donner la méthode pour identifier un modèle du système, lorsque sa réponse :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>— a une tangente à l'origine de pente non nulle, et ne comporte aucune oscillation ;</li> <li>— a une tangente à l'origine de pente nulle, et ne comporte aucune oscillation ;</li> <li>— a une tangente à l'origine de pente nulle, et comporte des oscillations.</li> </ul> <p>Quelle est l'autre forme de la fonction de transfert d'un 2<sup>e</sup> ordre non oscillatoire. Comment et dans quel cas peut-on la simplifier ?</p>
Modélisation des AM à distance (cas de la pesanteur)	<p>Donner les 2 types d'AM, et donner un exemple pour chacune.</p> <p>Donner la modélisation globale d'un champ d'action <math>d\vec{F}(Q)</math>.</p> <p>Donner les modèles local et global de l'action de la pesanteur.</p> <p>Donner la relation permettant de déterminer la position du centre d'inertie <math>G</math>.</p> <p>Donner la relation du champ des moments du torseur d'AM.</p>
Modélisation des AM de contact surfacique - Lois de Coulomb	<p>Expliquer les phénomènes de frottement et d'adhérence.</p> <p>Détailler la force élémentaire de contact lorsqu'un de ces phénomènes est pris en compte.</p> <p>Comment trouve-t-on le sens et la direction de l'effort tangentiel de contact ?</p> <p>Donner la loi de Coulomb pour une action mécanique de contact surfacique.</p>
Modélisation des AM de contact ponctuel	<p>Donner les lois de Coulomb pour une action mécanique de contact ponctuel.</p> <p>Que se passe t-il dans l'écriture du torseur d'une liaison ponctuelle, lorsqu'on prend en compte le frottement, le pivotement et le roulement ?</p>

Cours	Questions
PFS (modélisation par des torseurs écrits en ligne)	<p>Donner le torseur de l'action mécanique transmissible par la liaison. . .</p> <p>En statique, comment s'appelle le schéma similaire au schéma cinématique.</p> <p>En statique, comment s'appelle le graphe similaire au graphe de liaison.</p> <p>Que comporte ce graphe en plus du graphe de liaison.</p> <p>Quand peut-on admettre qu'un mécanisme est « plan » ?</p> <p>Que se passe-t-il dans l'écriture d'un torseur quand on fait l'hypothèse problème plan ?</p> <p>Expliquer le calcul d'un moment par la méthode du bras de levier.</p> <p>Expliquer la méthode pour déterminer une loi E/S statique.</p>
Arc-boutement	<p>Donner la notion d'arc-boutement.</p> <p>Que vérifie comme loi un solide arc-bouté ?</p>
Systèmes multiphysiques	<p>Indiquer ce que représente le produit d'une variable effort par une variable flux.</p> <p>Préciser les variables effort et flux pour les domaines</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>— électrique ;</li> <li>— mécanique de translation ;</li> <li>— mécanique de rotation ;</li> <li>— hydraulique ;</li> <li>— thermique.</li> </ul>
Représentation d'une fonction logique – Schéma électrique et pneumatique	<p>Algèbre de Boole à connaître</p> $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ $a + \bar{a} \cdot b = a + b, a \cdot (a + b) = a, (a + b) \cdot (\bar{a} + c) = a \cdot c + \bar{a} \cdot b$ <p>Donner les théorèmes de De Morgan.</p> <p>Donner l'équation logique, le symbole et la table de vérité des fonctions ou exclusif et et inclusif.</p> <p>Donner le symbole pneumatique d'un distributeur 3/2 monostable à commande pneumatique à pression montante.</p> <p>Donner le symbole électrique d'un contacteur.</p>
Numération et codage	<p>Que signifient bit, octet et mot ?</p> <p>Que signifie bit de poids fort ?</p> <p>Expliquer comment passe-t-on d'une base quelconque à une autre base, et réciproquement.</p> <p>Préciser le codage binaire réfléchi (codage Gray).</p>

## Quelques éléments de réponse

### Activité 1

$$H(s) = \left( A + \frac{B}{C} \right) \left( \frac{CD}{1 - CDF} \right)$$

### Activité 2

$$\vec{v}(G_2, 2/0) = b\dot{\alpha}\vec{y}_1 + c\dot{\alpha} \sin \theta \vec{x}_2 - c\dot{\theta}\vec{y}_2$$

$$\vec{a}(G_2, 2/0) = (c\ddot{\alpha} \sin \theta - b\dot{\alpha}^2 + 2c\dot{\theta}\dot{\alpha} \cos \theta)\vec{x}_1 + (b\ddot{\alpha} + c\dot{\alpha}^2 \sin \theta)\vec{y}_1 - c\ddot{\theta}\vec{y}_2 - c\dot{\theta}^2\vec{z}_2$$

### Activité 3

$$\lambda = e \cos \alpha + \sqrt{R^2 - (e \sin \alpha + d)^2}$$

### Activité 4

1.

$$\frac{N_3}{N_1} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_1 Z_{22} + Z_{21} Z_0}$$

2.

$$\frac{N_3}{N_1} = 1 - \frac{Z_0 Z_{22}}{Z_{21} Z_3}$$

### Activité 5

$$1. \mathcal{T}(0 \rightarrow 1) = \begin{matrix} \begin{matrix} X_{01}\vec{x}_0 + Y_{01}\vec{y}_0 \\ 0 \end{matrix} \\ O \end{matrix} .$$

$$2. \mathcal{T}(1 \rightarrow 3) = \begin{matrix} \begin{matrix} Y_{33}\vec{y}_0 \\ 0 \end{matrix} \\ B \end{matrix} ; \mathcal{T}(2 \rightarrow 3) = \begin{matrix} \begin{matrix} -Y_{33}\vec{y}_0 \\ 0 \end{matrix} \\ D \end{matrix} ; \mathcal{T}(1 \rightarrow 4) = \begin{matrix} \begin{matrix} Y_{43}\vec{y}_0 \\ 0 \end{matrix} \\ C \end{matrix} ; \mathcal{T}(2 \rightarrow 4) = \begin{matrix} \begin{matrix} -Y_{43}\vec{y}_0 \\ 0 \end{matrix} \\ D \end{matrix} .$$

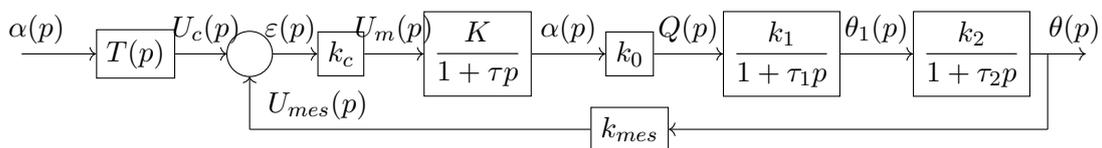
$$3. \mathcal{T}(1 \rightarrow 3) = \begin{matrix} \begin{matrix} -\frac{F}{2}\vec{y}_0 \\ 0 \end{matrix} \\ E \end{matrix} ; \mathcal{T}(1 \rightarrow 4) = \begin{matrix} \begin{matrix} -\frac{F}{2}\vec{y}_0 \\ 0 \end{matrix} \\ D \end{matrix} .$$

$$4. N = \frac{F(r - R)}{2} ; X_{01} = 0, Y_{01} = -F.$$

### Activité 6

$$1. Q(p) = k_0 \alpha(p), \Theta_1(p)(1 + \tau_1 p) = k_1 Q(p), \Theta(p)(1 + \tau_2 p) = k_2 \Theta_1(p).$$

$$2. \begin{array}{c} \alpha(p) \rightarrow \boxed{k_0} \rightarrow Q(p) \rightarrow \boxed{\frac{k_1}{1 + \tau_1 p}} \rightarrow \theta_1(p) \rightarrow \boxed{\frac{k_2}{1 + \tau_2 p}} \rightarrow \theta(p) \end{array}$$



3.

$$4. T(p) = K_{mes}.$$

### Activité 7

1. (a) —  $t_1 = \text{parité}(k_1, m_1, m_2, m_4) = 0$  donc  $k_1 + m_1 + m_2 + m_4 = 0$  (modulo 2);
- $t_2 = \text{parité}(k_2, m_1, m_3, m_4) = 0$  donc  $k_2 + m_1 + m_3 + m_4 = 0$  (modulo 2);
- $t_3 = \text{parité}(k_3, m_2, m_3, m_4) = 0$  donc  $k_3 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$  (modulo 2).

$m_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$m_2$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$m_3$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$m_4$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$k_1$	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
$k_2$	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
$k_3$	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1

- (b) —  $k_1 = \overline{m_1} \cdot \overline{m_2} \cdot m_4 + \overline{m_1} \cdot m_2 \cdot \overline{m_4} + m_1 \cdot \overline{m_2} \cdot \overline{m_4} + m_1 \cdot m_2 \cdot m_4 = m_1 \oplus m_2 \oplus m_4$ ;
- $k_2 = m_1 \oplus m_3 \oplus m_4$ ;
- $k_3 = m_2 \oplus m_3 \oplus m_4$ ;

2. (a)

$M_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$M_2$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$M_4$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$K_1$	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0

$T_1$	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
-------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

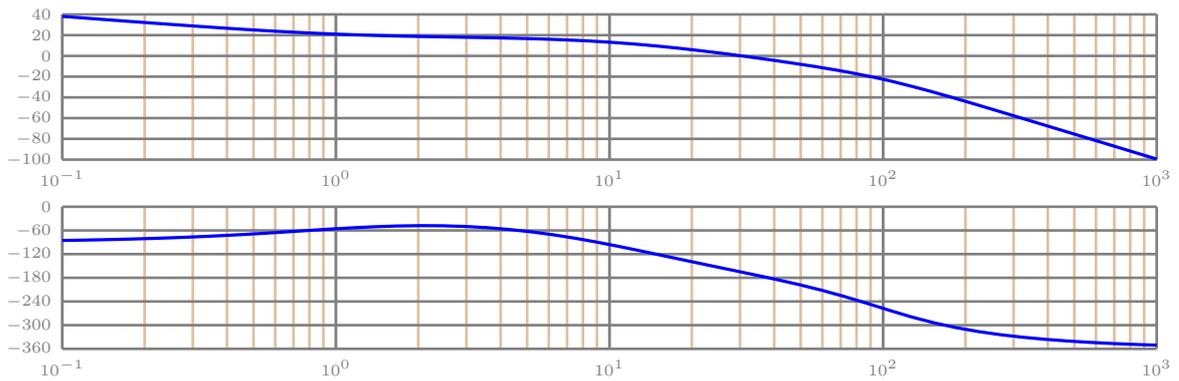
- (b) —  $T_1 = M_1 \oplus M_2 \oplus M_4 \oplus K_1$ ;
- $T_2 = M_1 \oplus M_3 \oplus M_4 \oplus K_2$ ;
- $T_3 = M_3 \oplus M_2 \oplus M_4 \oplus K_4$ ;

3.  $k_1 k_2 m_1 k_3 m_2 m_3 m_4 = 00101110$ .

4. quatrième caractère erroné.

### Activité 8

1.  $BP_{-3 \text{ dB}} = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .



- 2.
3. gain statique unitaire.
4.  $Q = 4 \text{ dB}$ .

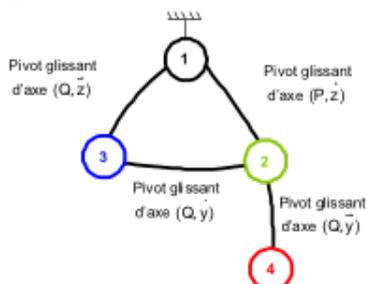
### Activité 9

1. entrée  $\alpha$ , sortie  $\lambda$ .
- 2.

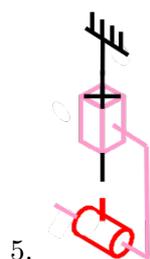
$$3. \mathcal{V}(1/0) = \underset{\forall P \in (C, \vec{x}_0)}{\begin{cases} \dot{\alpha} \vec{x}_0 \\ 0 \end{cases}}, \mathcal{V}(2/1) = \underset{\forall P}{\begin{cases} 0 \\ \lambda \vec{x}_0 \end{cases}}, \mathcal{V}(2/0) = \underset{\forall P \in (A, \vec{x}_0)}{\begin{cases} p_{20} \vec{x}_0 + q_{20} \vec{y}_0 + r_{20} \vec{z}_0 \\ v_{20} \vec{y}_0 + w_{20} \vec{z}_0 \end{cases}}.$$

4.  $\dot{\lambda} = r\dot{\alpha} \tan \varphi \sin \alpha$ .
5.  $q = S\dot{\lambda}$ .
6.  $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,  $q = rS\dot{\alpha} \tan \varphi \sin \alpha$ ;  $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $q = 0$ .
- 7.

### Activité 10



- 1.
2.  $\mathcal{V}(2/1) = \forall M \in (P, \vec{z}) \begin{cases} r_{21} \vec{z} \\ w_{21} \vec{z} \end{cases}$ .
3.  $\mathcal{V}(3/1) = \forall M \in (Q, \vec{z}) \begin{cases} r'_{21} \vec{z} \\ w'_{21} \vec{z} \end{cases}$ .
4.  $\mathcal{V}(2/3) = \forall M \in (Q, \vec{y}) \begin{cases} q_{23} \vec{y} \\ v_{23} \vec{y} \end{cases}$ .



- 5.

### Activité 11

1.  $\vec{OG} = \frac{1}{3}(X\vec{x} + Y\vec{y})$ .
2.  $\vec{OG}_1 = \frac{b}{3}\vec{x} + \left(c + \frac{h}{3}\right)\vec{y}$ .
3.  $\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow 1) = \begin{matrix} G_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} p \frac{hb}{2} \vec{z} \\ 0 \end{array} \right. \end{matrix}$ .
4.  $\vec{OG}_2 = -\frac{a}{2}\vec{x} + \frac{H}{3}\vec{y}$ .
5.  $\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow 2) = \begin{matrix} G_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} p \frac{aH}{2} \vec{z} \\ 0 \end{array} \right. \end{matrix}$ .
6.  $\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow 1+2) = \begin{matrix} O \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{2}(hb + aH)\vec{y} \\ -\frac{p}{6}[hb(3c + h) + aH^2]\vec{x} - \frac{b}{2}\left(\frac{hb^2}{3} - \frac{Ha^2}{2}\right)\vec{y} \end{array} \right. \end{matrix}$ .

### Activité 12

1.  $T(s) = S$ .

2.  $H(s) = \frac{SA}{1+SA} \frac{1}{1 + \frac{\tau}{1+SA}}$ ,  $K_1 = \frac{SA}{1+SA} = 0,5$ ,  $\tau_1 = \frac{\tau}{1+SA} = 0,1$  s.

3.  $tr_{5\%} = 3\tau_1 = 0,3$  s.

4.  $\gamma(+\infty) = 100$  m · s<sup>-2</sup>.

5.  $\varepsilon_s = 100$  m · s<sup>-2</sup>.

6.

7.  $H(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{SA}s + \frac{\tau}{SA}s^2}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{SA}{\tau}} = 2,24$  rad · s<sup>-1</sup>,  $\xi = \frac{1}{2\sqrt{SA\tau}} = 1,12$ .

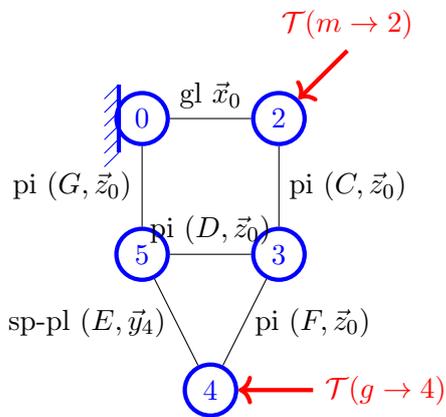
8.  $tr_{5\%} = 2,68$  s.

9.  $\gamma(+\infty) = 200$  m · s<sup>-2</sup>.

10.  $\varepsilon_s = 0$ .

### Activité 13

1.  $F_m = -\frac{2\pi}{p} C_m$ .



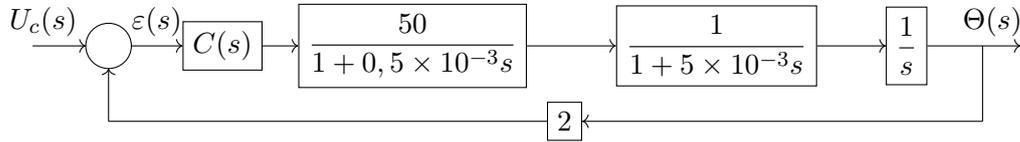
### Activité 14

repère	schéma	liaison à gauche	liaison à droite	liaison équivalente
		cylindre-plan	cylindre-plan	appui plan
		sphérique	sphère-plan	pivot
		pivot glissant	sphère-plan	glissière
		appui plan	cylindre-plan	glissière
		sphérique	sphère cylindre	pivot
		pivot glissant	sphère-plan	pivot
		pivot glissant	sphère plan	glissière
		sphère-plan	cylindre-plan	appui plan
		sphérique	sphère-plan	pivot
		appui plan	sphère-cylindre	encastrement

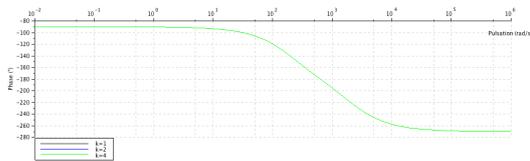
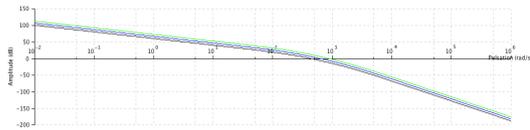
### Activité 15

- $x(t_f) = 48,22$  m.
- $t_1 - t_0 = 6,94$  s,  $t_2 - t_1 = 36$  s,  $t_3 - t_2 = 6,94$  s.

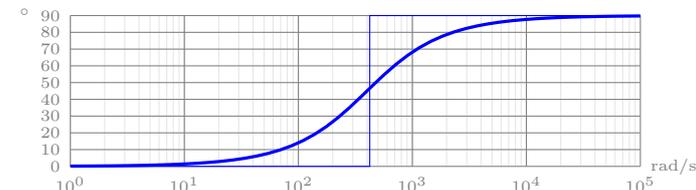
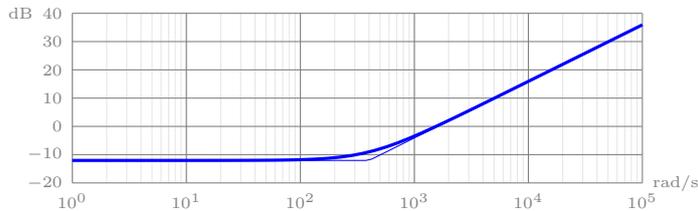
### Activité 16



- 
- $H(s) = \frac{550 \times K_p}{1100 \times K_p + s(1 + 0,5 \times 10^{-3}s)(1 + 5 \times 10^{-3}s)}$ .
- $K_p = 1$ , les pôles sont  $p_1 = -2109,26$ ,  $p_2 = -45,37 + 454,47i$  et  $p_3 = -45,37 - 454,47i$ ;  $K_p = 2$ , les pôles sont  $p_1 = -2200$ ,  $p_2 = 632,45i$  et  $p_3 = -632,45i$ ;  $K_p = 4$ , les pôles sont  $p_1 = -2348,74$ ,  $p_2 = 74,37 + 862,44i$  et  $p_3 = 74,37 - 862,44i$ .
- $H(s) = \frac{1}{2(1 + (2,17 \times 10^{-4} + 2,18 \times 10^{-3}j)s)(1 + (2,17 \times 10^{-4} - 2,18 \times 10^{-3}j)s)}$ ;  $K = \frac{1}{2}$ ,  $\omega_0 = 456,46$  rad  $\cdot$  s $^{-1}$ ,  $\xi = 0,1$ .
- $tr_{5\%} = 0,055$  s;  $\varepsilon(\infty) = \frac{s(\infty)}{KE_0} = 0$ ;  $d_1 = \frac{0,35}{0,5} = 70\%$ .



6.



7.

$$8. D(s) \times R(s) = 5,5 \times 10^{-3} \frac{1 + 2,5 \times 10^{-3}s}{s(1 + 5 \times 10^{-3}s)(1 + 0,5 \times 10^{-3}s)}$$

- Les pôles sont  $p_1 = -436,73$ ,  $p_2 = -881,63 + 1803,51i$  et  $p_3 = -881,63 - 1803,51i$ ; le zéro est  $z_1 = -400$ .

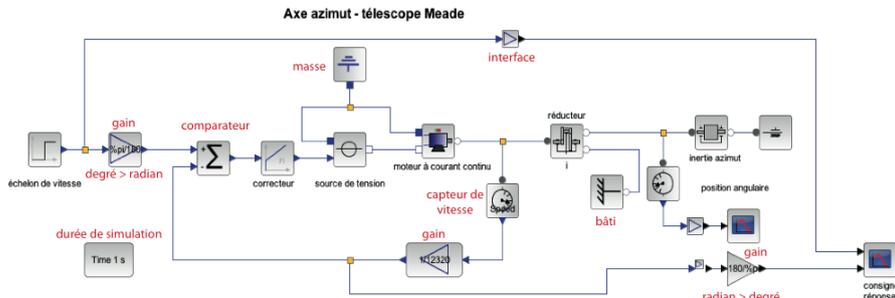
### Activité 17

- $\mathcal{T}(0 \rightarrow 1) = \begin{Bmatrix} X_{01}\vec{x}_0 \\ N_{01}\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_A$ ;  $\mathcal{T}(0 \rightarrow 2) = \begin{Bmatrix} X_{02}\vec{x}_0 \\ N_{02}\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_A$ ;  $\mathcal{T}(1 \rightarrow 2) = \begin{Bmatrix} X_{12}\vec{x}_0 + Y_{12}\vec{y}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_A$ ,  
 $-X_{12} \sin \alpha + Y_{12} \cos \alpha > 0$  et  $|X_{12} \cos \alpha + Y_{12} \sin \alpha| \leq |-X_{12} \sin \alpha + Y_{12} \cos \alpha|$ .

- $X_{01} = X_{12} = -\frac{F(\tan \alpha - f)}{f \tan \alpha + 1}, Y_{12} = -Y_{02} = F, N_{02} = -Fx, N_{01} = \frac{F(\tan \alpha - f)}{f \tan \alpha + 1}b + F(x-a).$
- Poser  $f = \tan \varphi, X = F \tan(\alpha - \varphi)$ . Arc-boutement si  $\alpha \leq \varphi$ .

### Activité 18

- $\omega(\text{telescope}/\text{Terre}) = 4,17 \times 10^{-3} \text{ } \circ \cdot \text{s}^{-1}, N = 8,55 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}.$



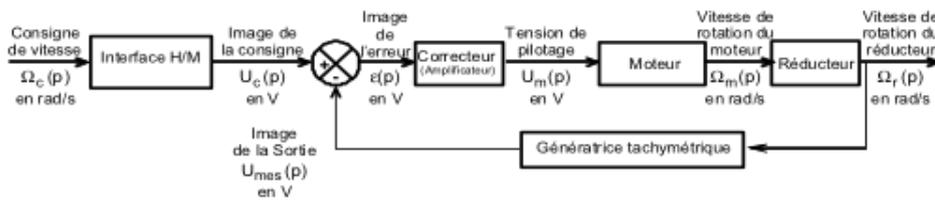
2.

Performance	Critère	Niveau cas 1	Niveau cas 2
Stabilité	Dépassement $D_1$ ; $d_1$ (%)	0 ; 0	0,001 ; 24 %
Précision	Erreur statique $\varepsilon_s$	0	0
Rapidité	Temps de réponse 5 %	0,24 s	0,2 s

3.

- Il suffit d'introduire un capteur de puissance sur le lien sortant du moteur. Puisque le moteur est supposé de rendement égal à 1, il est également possible de mesurer cette puissance du côté électrique. Cette valeur sera évidemment très faible vu la fréquence de rotation du moteur.

### Activité 19



1.

$$2. \frac{\Omega_r(s)}{\Omega_m(s)} = \frac{1}{20}.$$

$$3. \frac{U_{mes}(s)}{\Omega_r(s)} = \frac{1}{100} \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}.$$

$$4. T(s) = G.$$

$$5. \frac{\Omega_m(s)}{U_m(s)} = \frac{20}{1 + 0,02s}.$$

$$6. \frac{\Omega_r(s)}{\Omega_c(s)} = \frac{A}{A + 100} \frac{1}{1 + \frac{2}{A + 100}s}.$$

$$7. \varepsilon(t) = 2 \text{ mV}.$$

$$8. A < 24000.$$

$$9. tr_{5\%} = 249 \times 10^{-6} \text{ s}.$$

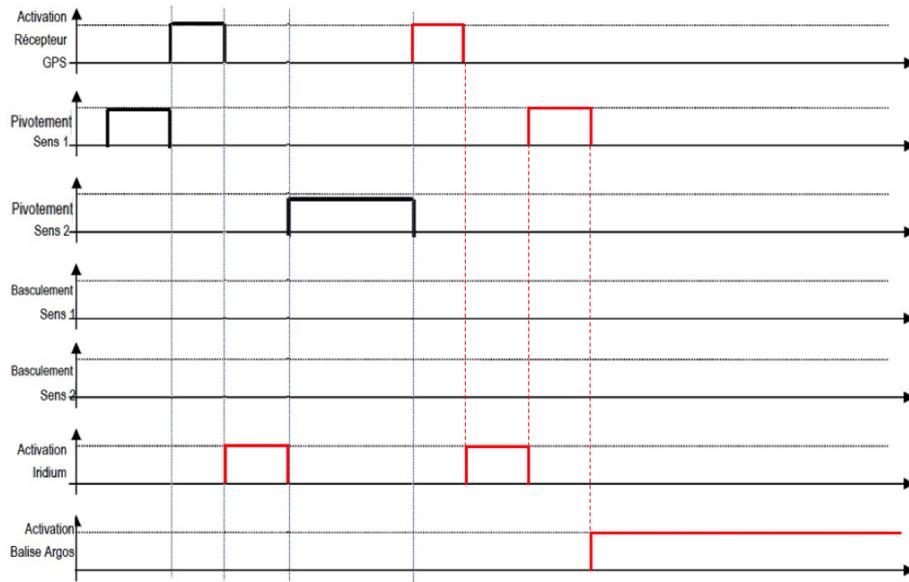
$$10. \omega_r(+\infty) = 0,199 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$11. \varepsilon_s = 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}; \varepsilon_v = 0,5 \%.$$

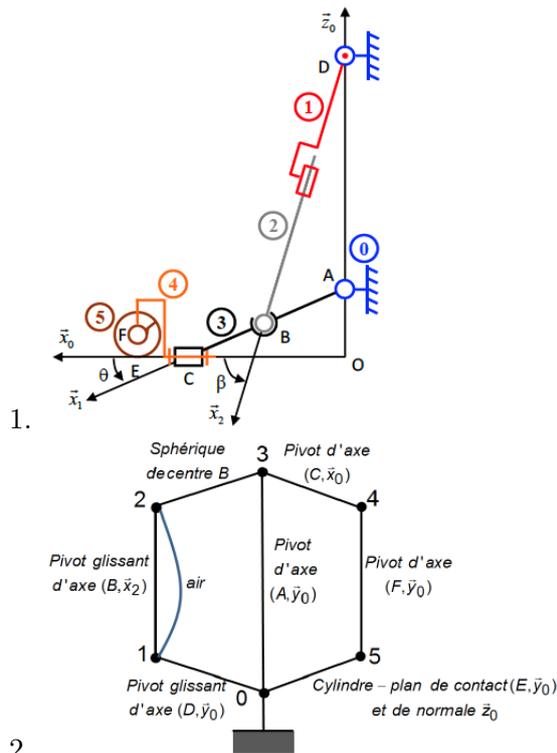
$$12. A > 99900.$$

13. instabilité, saturation...

## Activité 20



## Activité 21



2.

$$3. \mathcal{T}(0 \rightarrow 1) = \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} X_{01}\vec{x}_2 + Z_{01}\vec{z}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_D, \mathcal{T}(0 \rightarrow 3) = \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} X_{03}\vec{x}_0 + Z_{03}\vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_A, \end{matrix}$$

$$\mathcal{T}(0 \rightarrow 5) = \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} Z_{05}\vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{\forall P \in (E, \vec{z}_0)}, \mathcal{T}(2 \rightarrow 3) = \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} X_{23}\vec{x}_2 + Z_{23}\vec{z}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_B. \end{matrix}$$

$$4. \begin{cases} X_{01} + X_{32} = 0 \\ Z_{01} + Z_{32} = 0 \\ bZ_{01} = 0 \end{cases} .$$

$$5. \begin{cases} X_{03} + X_{23} \cos \beta = 0 \\ Z_{01} + Z_{05} - X_{23} \sin \beta = 0 \\ \frac{L}{2} X_{23} \sin(\beta - \theta) - Z_{05}(L \cos \theta + a) = 0 \end{cases}$$

6.

$$7. \tan \beta = \frac{d - c + \frac{L}{2} \sin \theta}{\frac{L}{2} \cos \theta}$$

$$8. \beta = 73^\circ, \|\vec{R}(\text{air} \rightarrow 2)\| = 261 \text{ N.}$$

$$9. p = 870\,000 \text{ Pa.}$$

$$10. p_0 = 0,2 \text{ N/mm}^2.$$

11. facteur de sécurité 50.

### Activité 22

1.

2.

3. On cherche les transformées de Laplace des équations :

— l'équation du système mécanique  $\theta(t) + T \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{J}{k} \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{k} C(t)$  donne :

$$\Theta(p) + Tp\Theta(p) + \frac{J}{k} p^2 \Theta(p) = \frac{1}{k} C(p)$$

— l'équation du correcteur PD  $s_5(t) + T_5 \frac{ds_5(t)}{dt} = K_5 \frac{de_5(t)}{dt}$  donne :

$$S_5(p) + T_5 p S_5(p) = K_5 p E_5(p)$$

— l'équation du correcteur PI  $K_1(\varepsilon_1(t) + T_1 \frac{d\varepsilon_1(t)}{dt}) = T_1 \frac{de_2(t)}{dt}$  donne :

$$K_1(\varepsilon_1(p) + T_1 p \varepsilon_1(p)) = T_1 p E_2(p)$$

4. Système mécanique : équation différentielle du second ordre.  $H_m(p) = \frac{\frac{1}{k}}{1 + Tp + \frac{J}{k} p^2}$

$$\text{Correcteur PD : } H_P(p) = \frac{K_5 p}{1 + T_5 p}$$

$$\text{Correcteur PI : } H_I(p) = \frac{K_1(1 + T_1 p)}{T_1 p}$$

$$5. H_C(p) = H_P(p) K_4.$$

$$6. FTBO_1(p) = H_B H_C.$$

$$7. FTBF_1(p) = \frac{H_B}{1 + H_B H_C}.$$

$$8. \varepsilon_2(p) = \frac{1}{p(1 + H_B H_C)}.$$

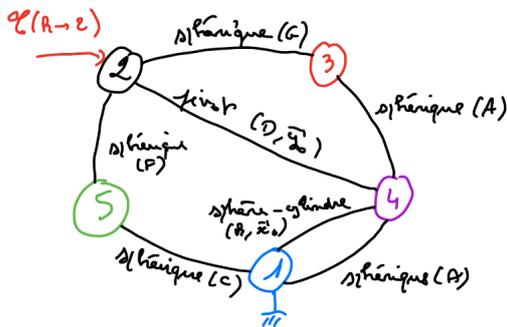
9.  $\lim_{p \rightarrow 0} \varepsilon_2(p) = 1$ . On peut donc en conclure que le système n'est pas précis.

$$10. FTBF_2(p) = \frac{H_A FTBF_1(p)}{1 + H_D H_A FTBF_1(p)}; H_T(p) = H_D \frac{H_A FTBF_1(p)}{1 + H_D H_A FTBF_1(p)}.$$

### Activité 23

- 1.
2.  $\mathcal{V}(2/1) = \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\}_O, \mathcal{V}(3/1) = \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \dot{\beta} \vec{x}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\}_C,$
3.  $\mathcal{V}(4/2) = \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{\omega}(4/2) \\ 0 \end{matrix} \right\}_A, \mathcal{V}(4/3) = \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{\omega}(4/3) \\ 0 \end{matrix} \right\}_D.$
4.  $\frac{\dot{\beta}}{\dot{\theta}} = \frac{a(L - b \sin \beta) \cos \theta - a \sin \theta}{b(a \sin \theta - L) \cos \beta + b \sin \beta}.$
5.  $\frac{\dot{\beta}}{\dot{\theta}} \approx -\frac{a}{b}.$

### Activité 24



- 1.
2. — on isole 5 : solide soumis à l'action de deux glisseurs, on en déduit les directions et l'égalité des modules des glisseurs ; inconnues  $X_{15}, Y_{15}, Z_{15}, X_{25}, Y_{25}, Z_{25}$ ,  
 — on isole 3 : solide soumis à l'action de deux glisseurs, on en déduit les directions et l'égalité des modules des glisseurs ; inconnues  $X_{43}, Y_{43}, Z_{43}, X_{23}, Y_{23}, Z_{23}$ ,  
 — on isole 2 : théorème du moment statique en projection suivant  $\vec{y}_0$  ; inconnues  $X_{32}, Z_{52}, X_{52}$ ,  
 — on isole  $\{2, 3, 4\}$  : théorème du moment statique en projection suivant  $\vec{x}_0$  ; inconnues  $Y_{52}$  ;
3.  $X_{15} = 0, X_{52} = 0, Y_{43} = 0, Y_{23} = 0, Y_{52} = -\frac{F_z}{2}, Z_{52} = \frac{F_z}{6}, X_{32} = \frac{1}{4} \left( \frac{F_z}{6} - 6F_x \right),$   
 $Z_{32} = \frac{3}{8} \left( \frac{F_z}{6} - 6F_x \right), Y_{15} = -\frac{F_z}{2}, Z_{15} = \frac{F_z}{6} ;$
- 4.

### Activité 25

1. le point  $P$  se déplace sur une sphère de centre  $A$  et de rayon  $\sqrt{2}a$  car  $AP$  est constant et  $A$  fixe.
2. le paramétrage de  $P$  n'est pas unique (par exemple,  $\alpha = 0, \beta = 90^\circ$  et  $\alpha = 180^\circ, \beta = 0$ ).
- 3.
4.  $\vec{OB} = h\vec{z}_0 + a\vec{z}_2 - b\vec{y}_2.$
5.  $\mathcal{V}(2/1) = \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \dot{\beta} \vec{z}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\}_A, \mathcal{V}(1/0) = \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_A.$
6.  $\mathcal{V}(2/0) = \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \dot{\beta} \vec{z}_1 + \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_A.$
7.  $\vec{v}(B, 2/0) = \dot{\alpha}(a \sin \beta + b \cos \beta) \vec{x}_1 - \dot{\beta}(a\vec{y}_2 + b\vec{z}_2).$

8.

9. le synchro-resolver mesure un angle : c'est un asservissement de position.

10.

$$11. FTCD(p) = \frac{K_A K_m K_R}{p(1 + \tau p)}; FTBO(p) = \frac{K_A K_m K_R K_S}{p(1 + \tau p)}; FTBF(p) = \frac{K_A K_m K_R}{p(1 + \tau p) + K_A K_m K_R K_S};$$
$$FTBF(p) = \frac{1}{K_S} \frac{1}{1 + \frac{p}{K_A K_m K_R K_S} + \frac{\tau p^2}{K_A K_m K_R K_S}}.$$

$$12. \dot{\beta}_m(t) = K_m U_0 (1 - \exp(-\frac{t}{\tau})) u(t).$$

$$13. K_m = 4 \text{ rad/s/V}; \tau = 0,02 \text{ s}; tr_{5\%} = 0,06 \text{ s}.$$

$$14. \varphi(\omega_0) = -\frac{3\pi}{4}.$$

$$15. \omega_0 = 50 \text{ rad/s}; \tau = 0,02 \text{ s}; K_m = 4.$$

$$16. T = 0,62 \text{ s}; \Delta T = 0,16 \text{ s}.$$

# Résumés

## Vecteurs – torseurs

**Produit scalaire de deux vecteurs** – À tout couple de vecteurs  $(\vec{u}, \vec{v})$ , tel que  $\alpha$  soit l'angle de ces deux vecteurs, on associe le scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha$ .

- le produit scalaire est nul si l'un des vecteurs est nul ou si les vecteurs sont orthogonaux;
- $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ ;
- expression dans la base orthonormée  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ .

**Produit vectoriel de deux vecteurs** – Le produit vectoriel des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est un vecteur noté  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ ; ce vecteur est perpendiculaire au plan formé par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Le sens est tel que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  soit un trièdre direct. En appelant  $\alpha$  l'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$ , on a  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin \alpha|$ .

On a  $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ , le produit vectoriel est anticommutatif.

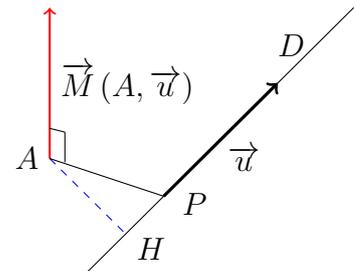
**Produit mixte de trois vecteurs** – Le produit mixte des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  est le scalaire

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}. \text{ On vérifie : } (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \text{ On a également :}$$

- $k(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (k\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, k\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, k\vec{w})$ ;
- $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w})$ ;
- $(\vec{u}, k\vec{u}, \vec{w}) = 0$ ;
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ ;
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ ;
- le produit mixte de trois vecteurs formant un trièdre direct est positif. Il est négatif dans le cas contraire.

*Remarque importante* : le produit mixte est très utile lors des projections effectuées dans le cadre des sciences de l'ingénieur.

**Moment d'un vecteur** – Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine de dimension 3 et  $E$  son espace vectoriel associé. Soit  $\vec{u}$  un élément de  $E$ . Soit  $(A, P) \in \mathcal{E}^2$ . Soit  $D$  la droite affine dirigée par  $\vec{u}$ . Nous supposons que  $P$  est élément de  $D$ . On appelle moment en  $A$  du vecteur  $\vec{u}$  le vecteur noté  $\vec{M}(A, \vec{u})$  tel que  $\vec{M}(A, \vec{u}) = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{u}$ .



**Torseur** – On appelle torseur un champ antisymétrique affine représenté par ses éléments de réduction en un point  $A$  qui sont sa résultante  $\vec{R}$  et son moment au point  $A$ ,  $\vec{M}(A, \vec{R})$ . Il sera noté ici de manière générique  $\mathcal{T} = \begin{matrix} \vec{R} \\ A \vec{M}(A) \end{matrix}$ . On rappelle la relation (de Varignon) entre deux points du champ de moment  $\vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$ .

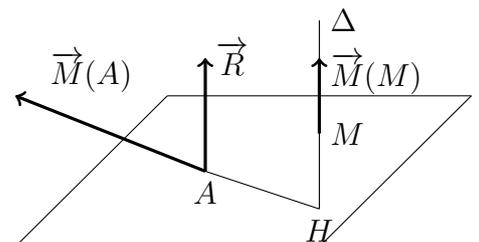
### Invariants d'un torseur

- la résultante  $\vec{R}$  d'un torseur est un invariant;
- l'invariant scalaire d'un torseur est le produit  $I = \vec{R} \cdot \vec{M}(A)$ ;
- l'invariant vectoriel d'un torseur est le vecteur  $\vec{I} = I \frac{\vec{R}}{R^2}$ .

On vérifie aisément que la deuxième relation est indépendante du point de réduction du torseur. Ce deuxième invariant est appelé *automoment*.

**Axe central d'un torseur** – On appelle axe central d'un torseur  $\Delta$ , l'ensemble des points  $P$  pour lequel la résultante et le moment en  $P$  sont colinéaires. Le coefficient de linéarité s'appelle le pas du torseur.  $\vec{M}(P) = \lambda \vec{R} \Leftrightarrow P \in \Delta$ .

Son équation vectorielle est  $\overrightarrow{AP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(A)}{R^2} + \lambda \vec{R}$ .



On peut noter les propriétés suivantes de l'axe central d'un torseur

- le moment en tout point de l'axe central est invariant. On l'appelle moment central du torseur;
- la norme du moment central est minimale.

## Espace vectoriel des torseurs

—  $\mathcal{T}_1 = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(A) \end{array} \right\}}$   $\mathcal{T}_2 = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2(B) \end{array} \right\}}$ . Pour en faire l'addition, nous devons les réduire au même

point et l'on obtient  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_1(A) + \vec{M}_2(A) \end{array} \right\}}$ .

— Produit par un scalaire  $\lambda$  du torseur  $\mathcal{T} : \lambda\mathcal{T} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \lambda\vec{R} \\ \lambda\vec{M}(A) \end{array} \right\}}$ .

— L'ensemble des torseurs sur l'espace affine  $\mathcal{E}$  muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire possède la structure d'espace vectoriel de dimension 6.

Soit  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  une base orthonormée de l'espace vectoriel de l'espace  $E$  associé à l'espace affine  $\mathcal{E}$ . Une base canonique de l'espace vectoriel des torseurs est donnée par

$$\underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{x} \\ 0 \end{array} \right\}} \quad \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}} \quad \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\}} \quad \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{x} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{y} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{z} \end{array} \right\}$$

— On appelle *comoment* des deux torseurs  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  et l'on note  $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$  celui-ci, le réel défini par

$$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_2(A) + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_1(A)$$

On vérifie que le comoment est un invariant du produit des deux torseurs. Le comoment intervient notamment dans la prise en compte des phénomènes énergétiques et utilise la notion de dualité des espaces vectoriels.

## Torseurs particuliers

— **couple** – On appelle couple un torseur dont la résultante est nulle. Le moment d'un couple est un invariant du couple. Les invariants scalaire et vectoriel sont nuls. On peut ne pas préciser le

point de la réduction du torseur  $\mathcal{C} = \boxed{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{M} \end{array} \right\}}$

— **glisseur** – On appelle glisseur tout torseur de résultante non nulle qui admet un point  $P$  pour lequel son moment est nul  $\mathcal{G} = \underset{\exists P \in \mathcal{E}}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ 0 \end{array} \right\}}$ . Un glisseur admet alors une droite de points

en lesquels le moment est nul. Cette droite est dirigée par la résultante  $\vec{R}$ . Si  $A$  est un point de cette droite,  $(A, \vec{R})$  est un vecteur glissant. La droite de moment nul est l'axe central du glisseur. Son pas est nul. Son invariant scalaire est nul.

— **torseur à structure** Soit  $P$  un point de l'espace affine  $\mathcal{E}$ . Soit un champ de vecteurs  $\vec{f}(P)$  et une mesure  $\mu$ . On appelle torseur à structure, le torseur dont les éléments de réduction au

point  $A$  s'écrivent  $\mathcal{T} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \int_{M \in \mathcal{E}} \vec{f}(P) d\mu(P) \\ \int_{M \in \mathcal{E}} \vec{AP} \wedge \vec{f}(P) d\mu(P) \end{array} \right\}}$ .

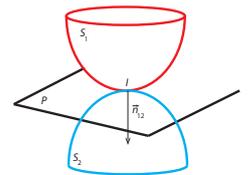
## Cinématique des solides indéformables

- on appelle **solide indéformable** un corps physique tel que quelque soit les points  $A$  et  $B$  de ce solide,  $\overline{AB}^2 = \text{cte}$
- on peut attacher un repère  $R(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  à tout solide indéformable. Un solide indéformable est caractériser par 6 paramètres indépendants : un point  $A$  du solide et trois angles caractéristiques (exemple, les angles d'Euler).
- le champ des vecteurs vitesse est un champ équiprojectif,  $(\vec{v}(A, S/R) - \vec{v}(B, S/R)) \cdot \overline{AB} = 0$ ;
- **torseur cinématique** attaché à un solide  $\mathcal{V}(S/R) = \begin{cases} \vec{\omega}(S/R) \\ \vec{v}(A, S/R) \end{cases}$  ;
- en projection dans un repère,  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), \mathcal{V}(S/R) = \begin{cases} \vec{\omega}(S/R) = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \\ \vec{v}(A, S/R) = u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z} \end{cases}$  ;
- **changement de point**,  $\vec{v}(B, S/R) = \vec{v}(A, S/R) + \vec{\omega}(S/R) \wedge \overline{AB}$ ;
- **dérivée vectorielle** (formule de Boor),  $\left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_0 = \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_1 + \vec{\omega}(1/0) \wedge \vec{u}$ ;
- **champ des accélérations** d'un solide,  $\vec{a}(B, S/R) = \vec{a}(A, S/R) + \left[ \frac{d\vec{\omega}(S/R)}{dt} \right]_R \wedge \overline{AB} + \vec{\omega}(S/R) \wedge (\vec{\omega}(S/R) \wedge \overline{AB})$  (il ne permet pas de définir de torseur) *formule à ne surtout pas retenir*, pour information seulement ;
- **composition des mouvements**,  $\mathcal{V}(R_0/R_n) = \sum_{i=1}^n \mathcal{V}(R_{i-1}/R_i)$ , donc  $\vec{\omega}(R_0/R_n) = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}(R_{i-1}/R_i)$  et  $\vec{v}(M, R_0/R_n) = \sum_{i=1}^n \vec{v}(M, R_{i-1}/R_i)$ ;
- **roulement sans glissement**, supposons qu'il existe à l'instant  $t$  un point  $I$  tel que  $\vec{v}(I, S/R) = 0$ . Si  $M$  vérifie également cette propriété, il appartient à un axe appelé axe instantané de rotation par rapport auquel  $S$  roule sans glisser par rapport à  $R$ ;
- **mouvement plan**, dans le repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , si le mouvement se situe dans le plan  $P(O, \vec{x}, \vec{y})$ , le torseur cinématique du solide  $S/R$  peut s'écrire  $\mathcal{V}(S/R) = \begin{cases} \vec{\omega}(S/R) = r\vec{z} \\ \vec{v}(A, S/R) = u\vec{x} + v\vec{y} \end{cases}$  ;
- **centre instantané de rotation**, le point  $I$  défini par  $\vec{v}(I, S/R) = 0$  dans le mouvement de  $S/R$ ;
- **contact ponctuel**, soient deux solides en contact en  $I$ . Le plan tangent commun aux deux solides en  $I$  est noté  $P$ . Le vecteur unitaire  $\vec{n}_{12}$  est perpendiculaire à  $P$  en  $I$  et dirigé du solide 1 vers le solide 2.

On a  $\mathcal{V}(2/1) = \begin{cases} \vec{\omega}(2/1) \\ \vec{v}(I, 2/1) \end{cases}$ . S'il y a maintien du contact au cours du temps  $\vec{v}(I, 2/1)$  appartient au plan  $P$ . Cette condition se traduit par  $\vec{v}(I, 2/1) \cdot \vec{n}_{12} = 0$ . Le vecteur  $\vec{v}(I, 2/1)$  est appelé vitesse de glissement de 2 par rapport à 1 en  $I$ .

Le vecteur rotation  $\vec{\omega}(2/1)$  peut être projeté sur  $\vec{n}_{12}$  et sur le plan  $P$ . On écrit

$$\vec{\omega}(2/1) = \omega_p(2/1)\vec{n}_{12} + \vec{\omega}_r(2/1)$$



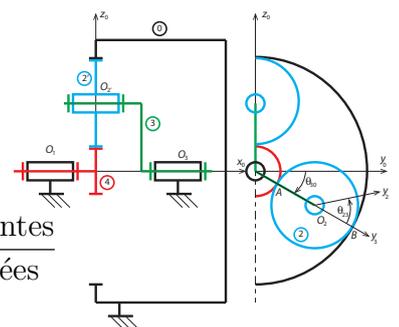
- $\omega_p(2/1)$  caractérise le pivotement de 2 par rapport à 1,
- $\vec{\omega}_r(2/1)$  caractérise le roulement de 2 par rapport à 1 ;
- **mouvement épicycloïdal**, un train épicycloïdal est un train d'engrenages dont l'axe d'au moins une roue dentée est mobile par rapport à un repère supposé fixe. On appelle :
  - *satellite* (s), un solide dont l'axe est mobile par rapport au bâti,
  - *porte-satellite* (ps), le solide pour lequel l'axe du satellite par rapport à lui est fixe,
  - *planétaire* (p), un solide qui roule sans glisser sur le satellite ;

Sur la figure ci-contre,  $s = 2$ ,  $ps = 3$ ,  $p = 0$  et  $p = 4$ .

La *formule de Willis* permet le traitement cinématique des trains épicycloïdaux. Elle s'obtient en écrivant les conditions de roulement sans glissement aux contacts entre les roues dentées. Elle s'écrit

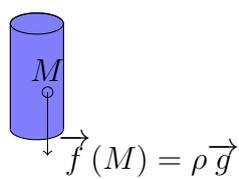
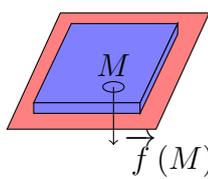
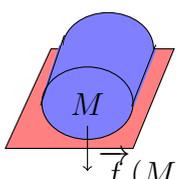
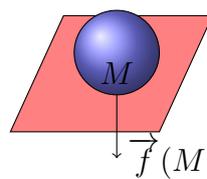
$$\frac{\omega(\text{sortie}/ps)}{\omega(\text{entrée}/ps)} = \frac{\omega(\text{sortie}/0) - \omega(ps/0)}{\omega(\text{entrée}/0) - \omega(ps/0)} = (-1)^n \frac{\text{caractéristiques menantes}}{\text{caractéristiques menées}}$$

$n$  étant le nombre de contacts extérieurs et les caractéristiques des roues dentées étant le rayon, le diamètre ou le nombre de dents.



# Actions mécaniques et principe fondamental de la statique

- on appelle **action mécanique** toute cause susceptible de
  - modifier le mouvement d'un solide,
  - maintenir un corps au repos,
  - déformer un corps;
- classification Il est possible de faire deux partitions des actions mécaniques :
  - *partition 1* : les actions intérieures et les actions extérieures à un système dont on aura défini les frontières,
  - *partition 2* : les actions à distance — ou de volume — et les actions de contact.
- **modélisation**, on notera  $E$  un ensemble matériel (solide ou système de solides) et  $\bar{E}$  l'extérieur (au sens topologique) de  $E$ . La modélisation des actions extérieures exercées sur  $E$  est réalisée ici avec l'outil mathématique torseur et l'on notera  $\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)$  ces dernières ;
- **additivité**,  $\mathcal{T}(F + G \rightarrow E) = \mathcal{T}(F \rightarrow E) + \mathcal{T}(G \rightarrow E)$  ;
- **partition**,  $\mathcal{T}(F \rightarrow E) = \mathcal{T}(F \rightarrow E_1) + \mathcal{T}(F \rightarrow E_2)$  ;
- **modèles local et global des actions mécaniques**

Action volumique	Action surfacique	Action linéique	Action ponctuelle
			
$\vec{f}(M) = \frac{d\vec{F}(M)}{dV}$	$\vec{f}(M) = \frac{d\vec{F}(M)}{dS}$	$\vec{f}(M) = \frac{d\vec{F}(M)}{dl}$	$\vec{f}(M)$

- **modèle global des actions de contact**  $\mathcal{T}(2 \rightarrow 1) = \begin{cases} \vec{R}(2 \rightarrow 1) = \int_S \vec{f}(M) dS \\ \vec{M}(Q, 2 \rightarrow 1) = \int_S \overrightarrow{QM} \wedge \vec{f}(M) dS \end{cases}$  ;

## – contact sans frottement

- *modèle local* :  $d\vec{F}(M) = \vec{f}(M) dS = -p(M) \vec{n}_1(M) dS$ ,

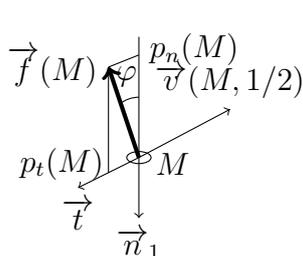
- *modèle global* :  $\mathcal{T}(2 \rightarrow 1) = \begin{cases} \vec{R}(2 \rightarrow 1) = \int_S -p(M) \vec{n}_1(M) dS \\ \vec{M}(Q, 2 \rightarrow 1) = \int_S \overrightarrow{QM} \wedge -p(M) \vec{n}_1(M) dS \end{cases}$  ;

## – contact avec frottement

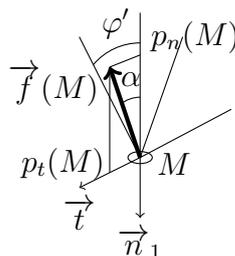
- *modèle local* :  $d\vec{F}(M) = \vec{f}(M) dS = (-p_n(M) \vec{n}_1(M) + \vec{p}_t(M)) dS$ ,

- *modèle global* :  $\mathcal{T}(2 \rightarrow 1) = \begin{cases} \vec{R}(2 \rightarrow 1) = \int_S (-p_n(M) \vec{n}_1(M) + \vec{p}_t(M)) dS \\ \vec{M}(Q, 2 \rightarrow 1) = \int_S \overrightarrow{QM} \wedge (-p_n(M) \vec{n}_1(M) + \vec{p}_t(M)) dS \end{cases}$  ;

## – lois de Coulomb pour le frottement de glissement



Cas du glissement



Cas d'absence de glissement

1. cas où  $\vec{v}(M, 1/2) \neq 0$  ; il y a glissement et

- $\vec{t}(M)$  est opposé à  $\vec{v}(M, 1/2)$  :  $\vec{t}(M) \wedge \vec{v}(M, 1/2) = 0$   
 $\vec{t}(M) \cdot \vec{v}(M, 1/2) < 0$  ,

- $p_t(M)$  est tel que  $\frac{p_t(M)}{p_n(M)} = f = \tan \varphi$ ,  $\varphi$  est l'angle de frottement et  $f$  est le facteur de frottement entre  $S_1$  et  $S_2$ . Ces deux paramètres dépendent de la nature des surface en contact ;

2. cas où  $\vec{v}(M, 1/2) = 0$  ; il y a adhérence et

- $p_t(M)$  est tel que  $\frac{p_t(M)}{p_n(M)} = \tan \alpha$ , avec  $\alpha \leq \varphi'$ ,  $\varphi'$  est l'angle d'adhérence et  $f' = \tan \varphi'$  est le facteur d'adhérence entre  $S_1$  et  $S_2$ .

- $\alpha = \varphi'$  à la limite de l'équilibre ;
  - $\vec{t}(M)$  appartient au plan tangent en  $M$  à 1 et 2 ; sa direction est *a priori* inconnue.
- On a, pour la plupart des couples de matériaux en contact  $\varphi \leq \varphi'$ . On prend souvent  $\varphi = \varphi'$ .

Dans ces conditions, le modèle global avec frottement s'écrit

$$\mathcal{T}(2 \rightarrow 1) = \begin{cases} \vec{R}(2 \rightarrow 1) = \int_S p_n(M) \left( -\vec{n}_1(M) + f \vec{t}(M) \right) dS \\ \vec{M}(Q, 2 \rightarrow 1) = \int_S \vec{QM} \wedge p_n(M) \left( -\vec{n}_1(M) + f \vec{t}(M) \right) dS \end{cases}$$

- **lois de Coulomb pour la résistance au roulement et au pivotement**, notons

$$\mathcal{T}(2 \rightarrow 1) = \begin{cases} \vec{R}(2 \rightarrow 1) = N \vec{n}_1 + T \vec{t} \\ \vec{M}(I, 2 \rightarrow 1) = M_n \vec{n}_1 + M_t \vec{t} \end{cases}$$

le torseur en un point  $I$  de la surface de contact. Notons  $\omega(1/2) = \omega_p \vec{n}_1 + \omega_r \vec{t}$  le vecteur taux de rotation du solide 1 par rapport au solide 2. On rappelle que  $\omega_p \vec{n}_1$  est le vecteur taux de pivotement et le vecteur  $\omega_r \vec{t}$  est le taux de roulement (dans le plan tangent).

- cas où  $\omega_p \vec{n}_1 \neq 0$ , il y a pivotement et

$$- \vec{M}_n \text{ est opposé à } \omega_p \vec{n}_1 : \begin{cases} \vec{M}_n \wedge \omega_p \vec{n}_1 = 0 \\ \vec{M}_n \cdot \omega_p \vec{n}_1 < 0 \end{cases},$$

$$- \text{on pose } \frac{\|\vec{M}_n\|}{|N|} = k, k \text{ est le facteur de résistance au pivotement entre } S_1 \text{ et } S_2;$$

- cas où  $\omega_p \vec{n}_1 = 0$ , il y a adhérence au pivotement et

$$- \text{on pose } \frac{\|\vec{M}_n\|}{|N|} = k', k' \text{ est le facteur d'adhérence au pivotement entre } S_1 \text{ et } S_2,$$

$$- \text{à la limite de l'équilibre, } k' = k;$$

- cas où  $\vec{\omega}_p \neq 0$ , il y a roulement et

$$- \vec{M}_t \text{ est opposé à } \vec{\omega}_r : \begin{cases} \vec{M}_t \wedge \vec{\omega}_r = 0 \\ \vec{M}_t \cdot \vec{\omega}_r < 0 \end{cases},$$

$$- \text{on pose } \frac{\|\vec{M}_t\|}{|N|} = h, h \text{ est le facteur de résistance au roulement entre } S_1 \text{ et } S_2;$$

- cas où  $\vec{\omega}_p = 0$ , il y a adhérence au roulement et

$$- \text{on pose } \frac{\|\vec{M}_t\|}{|N|} = h', h' \text{ est le facteur d'adhérence au roulement entre } S_1 \text{ et } S_2,$$

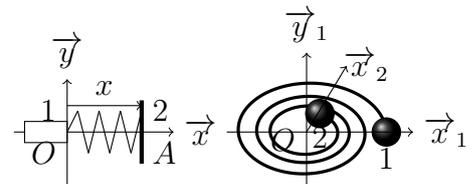
$$- \text{à la limite de l'équilibre, } h' = h;$$

- **torseurs particuliers**

$$- \text{pesanteur, } \mathcal{T}(pes \rightarrow E) = \begin{cases} m(E) \vec{g} \\ 0 \end{cases},$$

$$- \text{ressort linéaire, } \mathcal{T}(1 + r \rightarrow 2) = \begin{cases} -k(x - x_0) \vec{x} \\ 0 \end{cases},$$

$$- \text{ressort de torsion } \mathcal{T}(1 + r \rightarrow 2) = \begin{cases} 0 \\ -k(\alpha - \alpha_0) \vec{x} \end{cases};$$



- **principe fondamental de la statique**, pour qu'un solide  $S$  soit en mouvement uniforme ou au repos dans un référentiel galiléen, il faut et il suffit que le torseur associé aux actions mécaniques extérieures à  $S$  soit nul. On note  $\mathcal{T}(\vec{S} \rightarrow S) = 0$ ;

- **principe des actions réciproques**, soit deux solides 1 et 2 en contact. Le torseur des actions mécaniques exercées par le solide 1 sur le solide 2 est opposé au torseur des actions mécaniques exercées par le solide 2 sur le solide 1,  $\mathcal{T}(2 \rightarrow 1) = -\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)$ ;

- **ensemble soumis à l'action de 2 glisseurs**, il résulte de l'application du PFS que si un solide indéformable soumis à l'action de deux glisseurs est en équilibre, alors ceux-ci sont des vecteurs opposés et portés par la même droite affine;

- **ensemble soumis à l'action de 3 glisseurs**, il résulte de l'application du PFS que si un solide indéformable soumis à l'action de trois glisseurs est en équilibre, alors :

- les trois glisseurs sont coplanaires;
- les trois glisseurs sont concourants.

# Systèmes du 1<sup>er</sup> ordre

**Équation différentielle**  $\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$

**Fonction de transfert** avec conditions de Heaviside  $H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{K}{1 + \tau s}$

- $K$  est appelé *gain statique* du système;
- $\tau$  est appelé *constante de temps* du système.

## Analyse temporelle

**Réponse impulsionnelle**  $e(t) = \delta(t)$ , distribution de Dirac pour  $t_0 = 0$ .  $s(t) = \frac{K}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) u(t)$

**Réponse indicielle**  $e(t) = E_0 u(t)$ , échelon de Heaviside.  $s(t) = KE_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] u(t)$ .

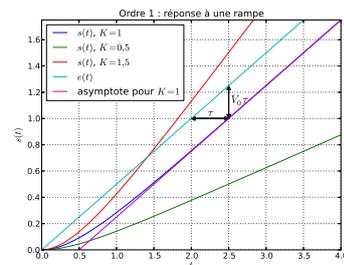
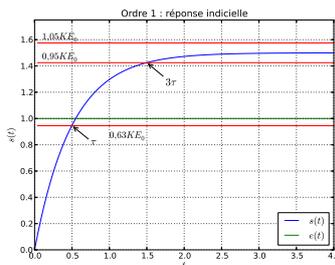
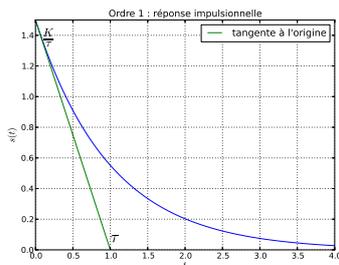
On note les valeurs remarquables

- $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = KE_0$ ;
- $s(\tau) \approx 0,632KE_0$ ;
- temps de montée de l'ordre de  $2\tau$ ;
- temps de réponse à 5%  $t_{5\%} \approx 3\tau$ ;
- pente de la tangente à l'origine  $\frac{KE_0}{\tau}$ .

**Réponse à une rampe**  $e(t) = V_0 t u(t)$ ,  $s(t) = KV_0 \left[ (t - \tau) + \tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u(t)$ .

On note les caractéristiques remarquables

- régime permanent  $s_p(t) = KV_0(t - \tau)$ ;
- si  $K = 1$  alors la sortie *suit* l'entrée avec un retard constant  $\tau$ . La différence entre la sortie et l'entrée est appelée *erreur de traînage* et vaut  $V_0\tau$ ;
- si  $K \neq 1$  les fonctions  $e(t)$  et  $s(t)$  n'ont pas la même pente et divergent donc.



## Analyse fréquentielle

**Fonction de transfert en régime harmonique**  $H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$ .

- module  $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$ ;
- module en décibel  $|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} = 20 \log K - 10 \log(1 + \tau^2\omega^2)$ ;
- argument  $\text{Arg}(H(j\omega)) = -\arctan \tau\omega$ ;
- partie réelle  $\text{Re}(H(j\omega)) = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2}$ ;
- partie imaginaire  $\text{Im}(H(j\omega)) = \frac{-K\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2}$ .

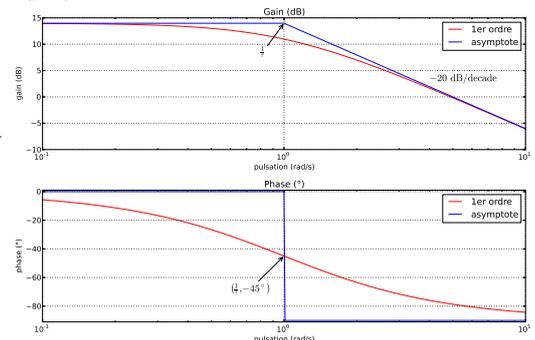
## Diagramme de Bode

*Diagramme d'amplitude*

- asymptote horizontale quand  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow 0} (|H(j\omega)|) = 20 \log K$ ;
- asymptote de pente -20 dB/décade quand  $\omega \rightarrow \infty$ ;
- diagramme asymptotique proche du diagramme réel et très bonne approximation;
- pour la pulsation de cassure  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ , l'écart par rapport au point d'intersection des asymptotes vaut -3 dB;
- pour les pulsations  $2\omega_c$  et  $\frac{\omega_c}{2}$ , l'écart vaut -1 dB par rapport aux asymptotes.

*Diagramme de phase*

- asymptote horizontale quand  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow 0} (\text{Arg}(H(j\omega))) = 0$ ;
- asymptote horizontale quand  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\text{Arg}(H(j\omega))) = -\frac{\pi}{2}$ ;
- diagramme asymptotique présente une cassure pour  $\text{Arg}(H(j\omega)) = -\frac{\pi}{4}$ ,
- pour la pulsation de cassure  $\text{Arg}(H(j\omega)) = -\frac{\pi}{4}$ ,
- $\text{Arg}(H(j\frac{\omega_c}{2})) = -\arctan(\frac{\tau\omega_c}{2}) \approx -26,56^\circ$ ,
- $\text{Arg}(H(j\frac{\omega_c}{2})) = -\arctan(2\tau\omega_c) \approx -63,43^\circ$ .

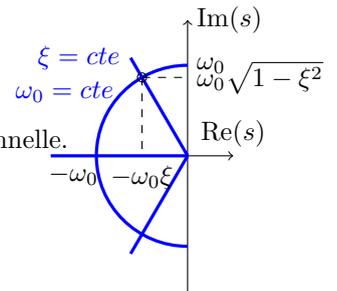


# Systèmes du 2<sup>e</sup> ordre

**Équation différentielle**  $\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$

**Fonction de transfert** avec conditions de Heaviside  $H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}s + \frac{1}{\omega_0^2}s^2}$

- $K$  est appelé *gain statique* du système;
- $\omega_0$  est appelé *pulsation propre* ou *pulsation naturelle* du système;
- $\xi$  (ou  $z$  ou  $m$ ) est appelé *coefficient d'amortissement* ou *facteur d'amortissement*.



Les pôles de la fonction de transfert sont les racines du dénominateur de la fraction rationnelle.

On distingue trois cas

- $\xi > 1$ , les deux pôles sont réels et valent  $-\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$ ;
- $\xi = 1$ , les deux pôles sont égaux et valent  $\xi = -\omega_0$ ;
- $\xi < 1$ , les deux pôles sont complexes conjugués et valent  $-\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$ .

## Analyse temporelle

**Réponse indicielle pour  $\xi > 1$** ,  $e(t) = E_0u(t)$ , échelon de Heaviside. Les deux pôles  $p_1 = -\frac{1}{\tau_1}$  et  $p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$  sont réels,

$$s(t) = KE_0 \left( 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \right) u(t).$$

On note les caractéristiques remarquables

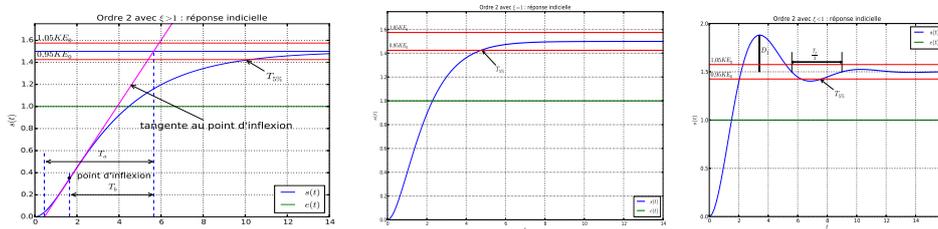
- $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = KE_0$ ;
- pente de la tangente nulle à l'origine.

**Réponse indicielle pour  $\xi = 1$** ,  $e(t) = E_0u(t)$ , échelon de Heaviside. Les deux pôles sont identiques,  $s(t) = KE_0(1 - (1 + \omega_0 t) \exp(-\omega_0 t)) u(t)$ . Il n'y a pas d'oscillations.

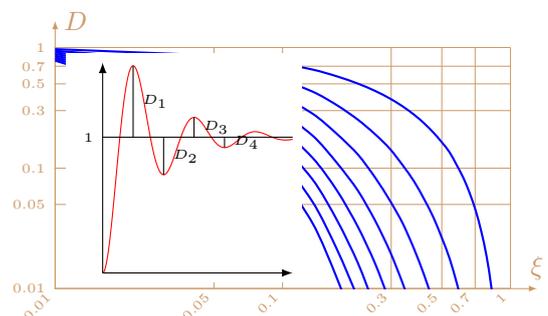
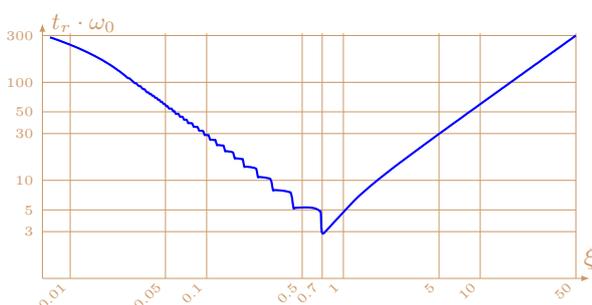
**Réponse indicielle pour  $\xi < 1$** ,  $e(t) = E_0u(t)$ , échelon de Heaviside,  $s(t) = KE_0 \left[ 1 - \frac{\exp(-\xi\omega_0 t)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2} + \varphi) \right] u(t)$

On note les caractéristiques remarquables :

- $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = KE_0$ ;
- pente de la tangente nulle à l'origine;
- on appelle *pseudo-pulsation* ou *pulsation propre amortie* le réel  $\omega_p = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$ ;
- on appelle pseudo-période le réel  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$ ;
- temps de montée  $t_m = \frac{T_p}{2} \left( 1 - \frac{\varphi}{\pi} \right)$ , avec  $\tan(\varphi) = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$ ;
- temps de pic  $t_p = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_p}$ ;
- temps de réponse à 5% (cf. figure ci-dessous) ; pour  $\xi \ll 1$ , on a approximativement  $t_{5\%} \approx \frac{3}{\xi\omega_0}$ ;
- valeur minimale du produit  $t_{5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$  pour  $\xi \approx 0,7$ ;
- dépassement  $d = s(\infty) - KE_0 = KE_0 \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)$  ; le dépassement relatif vaut  $d_r = \frac{d}{KE_0} = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)$ ;
- dépassements successifs tels que  $\ln \frac{d_{i+1}}{d_i} = \frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$ .



## Abaques (temps de réponse et dépassements)



## Analyse fréquentielle

**Fonction de transfert en régime harmonique**  $H(j\omega) = \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{2\xi\omega}{\omega_0}}$ .

— module  $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ ;

— argument  $\text{Arg}(H(j\omega)) = -\arctan \frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ .

## Diagramme de Bode

**Cas  $\xi > 1$**   $|H(j\omega)| = \frac{K}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$  avec  $\omega_1 = \omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$  et  $\omega_2 = \omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$ ,  $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$ . Donc

$2 \log \omega_0 = \log \omega_1 + \log \omega_2$  sur une échelle logarithmique, la pulsation  $\omega_0$  est le milieu de  $[\omega_1, \omega_2]$ .

**Cas  $\xi = 1$**   $|H(j\omega)| = \frac{K}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ ,  $|H(j\omega)| = \frac{K}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ ,  $|H(j\omega_0)| = \frac{K}{2}$ ,  $20 \log(|H(j\omega_0)|) = 20 \log \frac{K}{2} = 20 \log K - 6 \text{ dB}$ .

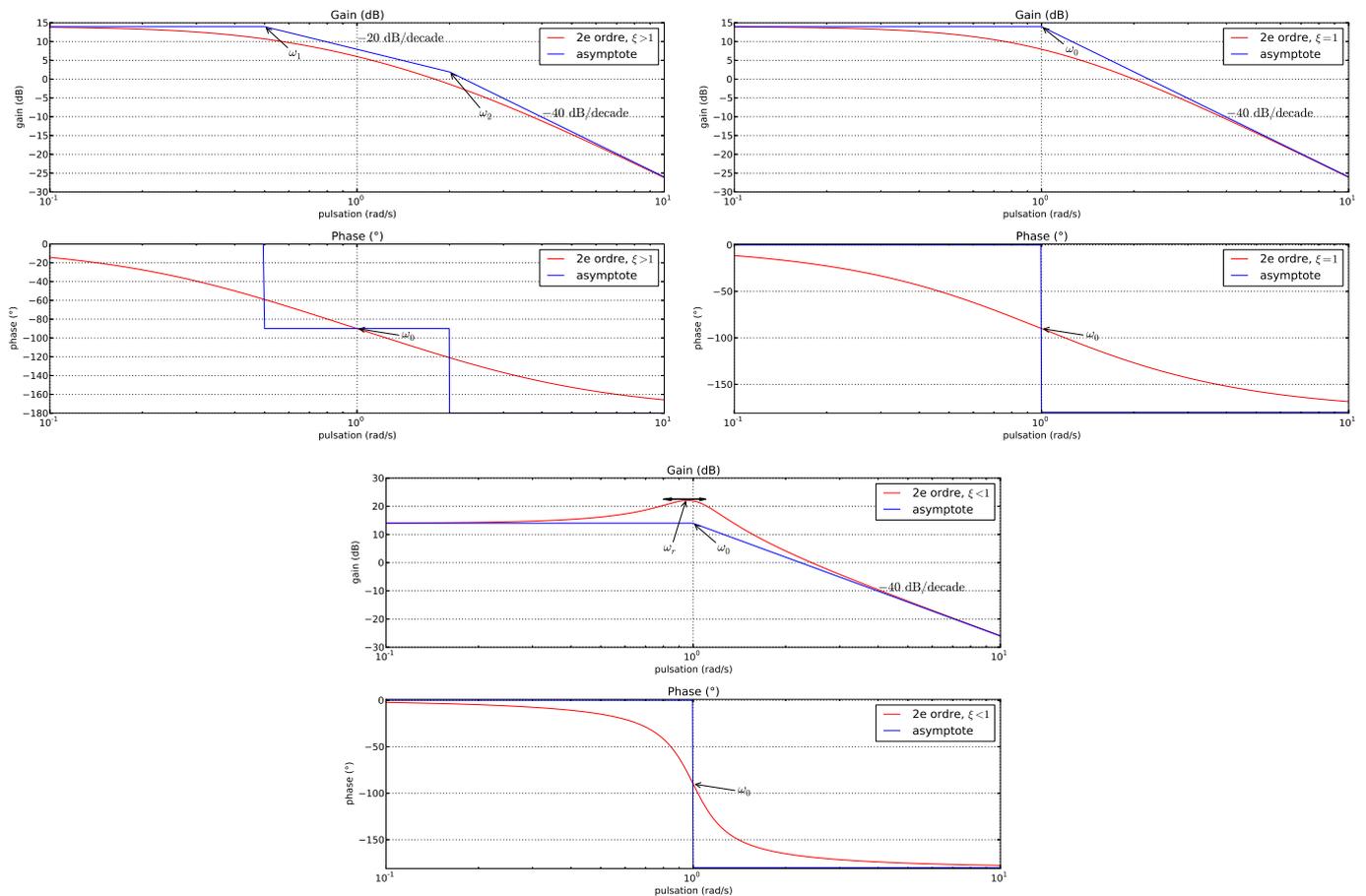
**Cas  $\xi < 1$**   $\omega_1 = \omega_0(\xi - j\sqrt{1 - \xi^2})$ ,  $\omega_2 = \omega_0(\xi + j\sqrt{1 - \xi^2})$ . La réponse présente une surtension. En effet, la dérivée du module de la fonction de transfert s'annule pour  $\omega = \omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}$ . La résonance n'existe donc que pour  $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

On note  $\omega_r$  la pulsation de résonance.

Pour cette valeur, le module de la fonction de transfert est maximal et vaut  $|H(j\omega_r)| = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$ .

On appelle *facteur de résonance* ou *facteur de surtension* le réel,  $Q = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(0)|}$ .

Remarquons que si  $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  alors la pulsation de coupure à -3 dB est égale à la pulsation propre  $\omega_0$  du système.

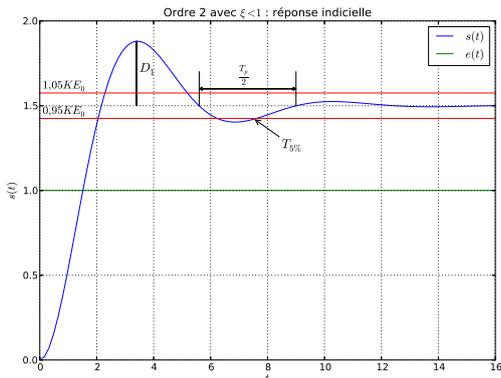


# Identification temporelle des systèmes d'ordre 2

## Identification par un deuxième ordre

**Réponse indicielle**  $e(t) = E_0 u(t)$ , échelon de Heaviside.

**Régime pseudo-périodique**  $\xi < 1$ , Fonction de transfert  $H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}s + \frac{1}{\omega_0^2}s^2}$

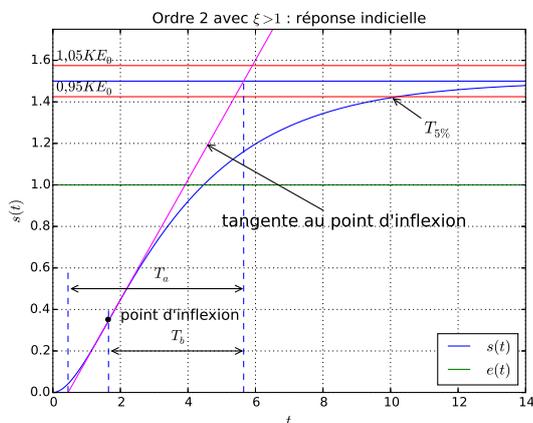


### Méthode

- $K = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} s(t)}{E_0}$  ;
- $d_1 = \frac{D_1}{KE_0} = \frac{\exp(-\pi\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \xi$  ;
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p \sqrt{1-\xi^2}}$ .

On peut également utiliser les deux premiers abaques ci-dessous.

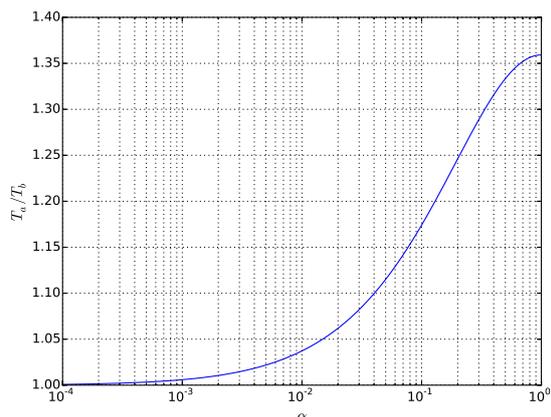
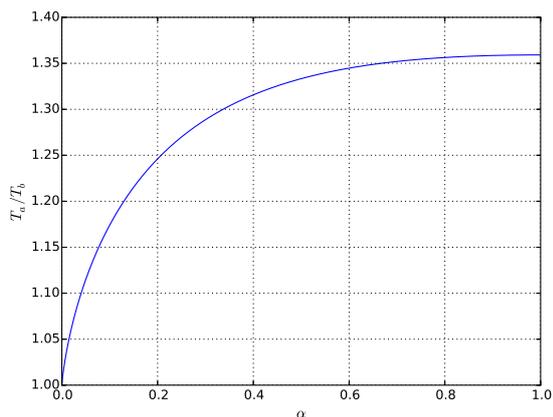
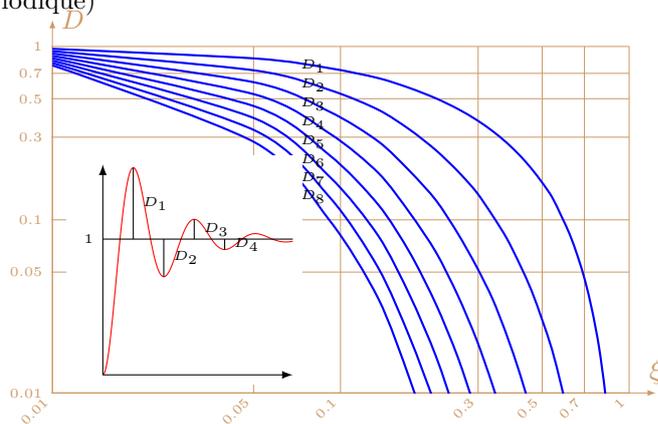
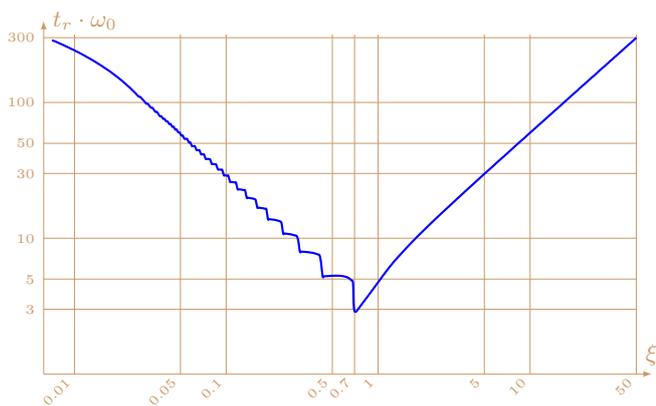
**Régime apériodique**  $\xi \geq 1$ , Fonction de transfert  $H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{K}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} = \frac{K}{(1 + \tau_1 s)(1 + \alpha \tau_1 s)}$



### Méthode (avec les deux derniers abaques)

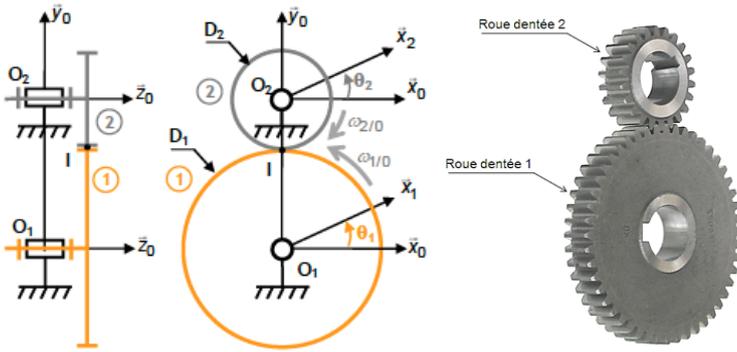
- $K = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} s(t)}{E_0}$  ;
- $\frac{T_a}{T_b} \rightarrow \alpha$  ;
- $\tau_1 = \frac{T_b}{1 + \alpha}$  et  $\tau_2 = \alpha \tau_1$  ;
- $\xi = \frac{1 + \alpha}{2\sqrt{\alpha}}$  ;
- $\omega_0 = \frac{1}{\tau_1 \sqrt{\alpha}}$ .

## Abaques (temps de réponse, dépassements et régime apériodique)



# Engrenages

**Principe – paramètres** : un engrenage est constitué de deux roues dentées qui engrènent l'une avec l'autre. La plus petite des roues dentées est appelée parfois « pignon » et la plus grande est appelée « roue » ou « couronne » dans le cas d'un engrenage intérieur.

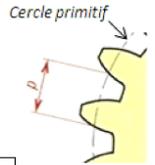


Les cercles représentés sur les schémas cinématiques correspondent aux cercles primitifs des roues dentées.

- diamètres primitifs  $D_1$  et  $D_2$  ;
- nombres de dents  $Z_1$  et  $Z_2$  ;
- pas primitif  $p = \frac{\pi D_1}{Z_1} = \frac{\pi D_2}{Z_2}$  ;
- le pas primitif correspond à la longueur de l'arc de cercle primitif compris entre deux dents successives ;
- **condition de fonctionnement** : pas identique pour les deux roues ;

— module  $m = \frac{D}{Z}$  ;  $p = \pi m$  ; pour que deux roues dentées puissent engrèner l'une avec l'autre, elles avoir le même module.

La forme des dents assure le roulement sans glissement au point de contact  $I$  des cercles fictifs de diamètres  $D_1$  et  $D_2$ . Ces cercles sont appelés cercles primitifs. Ils correspondent aux profils des roues de friction qui assureraient le même rapport de transmission.



**Rapport de transmission** : la condition de roulement sans glissement au point de contact  $I$  entre les

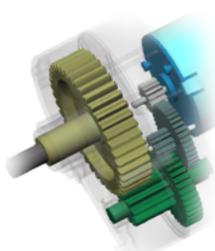
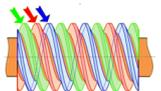
deux cercles primitifs permet d'obtenir le rapport de transmission  $i = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{D_1}{D_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$ .

## Typologie

Engrenage cylindrique extérieur	Engrenage cylindrique intérieur	Engrenage conique	Roue et vis sans fin
Ils transmettent un mouvement de rotation entre des arbres à axes parallèles.	Ils transmettent un mouvement de rotation entre des arbres à axes parallèles.	Ils transmettent un mouvement de rotation entre des arbres à axes concourants perpendiculaires.	Ils transmettent un mouvement de rotation entre des arbres à axes perpendiculaires non concourants.
 à denture droite réalisation simple, économique, déplacements axiaux possibles, bruyants.	 à denture hélicoïdale plus silencieux, permettent de transmettre des couples plus importants, efforts axiaux.		— rapport de réduction important (jusqu'à 150) ; — irréversible si nécessaire ; — faible rendement (environ 30 – 40 %) ; — forte usure.

Dans le cas particulier d'un engrenage roue et vis sans fin, le rapport de transmission est  $i = \frac{\omega_{roue/0}}{\omega_{vis/0}} =$

$\frac{Z_{vis}}{Z_{roue}}$  avec  $Z_{vis}$ , le nombre de filets de la vis et  $Z_{roue}$  le nombre de dents de la roue. Figure pour une vis à trois filets.



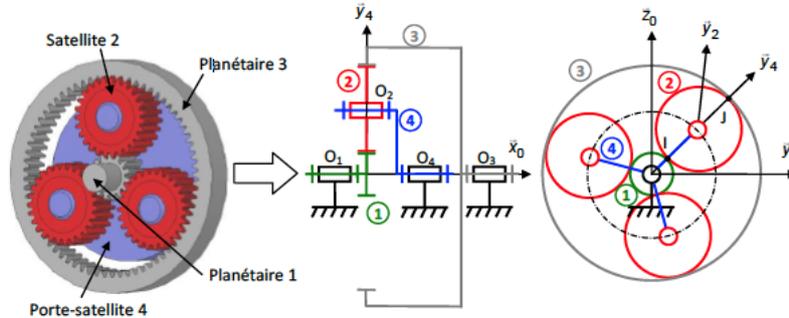
**Train d'engrenages simple** : dans un réducteur, pour augmenter le rapport de réduction, on peut associer plusieurs engrenages en série. On parle alors de train d'engrenages. Lorsque toutes les roues dentées sont en mouvement de rotation par rapport au bâti, on parle de « train simple ». Dans la pratique, pour calculer la loi entrée-sortie d'un train d'engrenages simple, il est inutile de déterminer et combiner les rapports de transmission de chacun des couples de roues dentées pris séparément.

On utilise directement la formule qui définit le rapport de transmission

$$i = \frac{\omega_{s/0}}{\omega_{e/0}} = (-1)^n \frac{\prod (Z, D, R)_{menantes}}{\prod (Z, D, R)_{menées}}$$

$(-1)^n$  donne le sens de rotation de la sortie par rapport à l'entrée avec  $n$  : nombre de contacts extérieurs entre roues. Cela n'a de sens que si l'on compare le sens des mouvements de rotation autour d'axes parallèles. Il faut donc être prudent lorsqu'il y a des engrenages coniques ou à roue et vis sans fin dans le réducteur.

**Train d'engrenages épicycloïdal** : dans un train d'engrenage simple, pour obtenir une réduction de vitesse importante, il est nécessaire d'utiliser plusieurs étages. Mais, cette solution devient rapidement encombrante et lourde. Une solution consiste à utiliser des trains épicycloïdaux qui permettent d'obtenir de grand rapport de réduction dans un encombrement faible.



Porte-satellite	Il s'agit d'une pièce en rotation par rapport au bâti sur laquelle sont montés le ou les satellites.
Satellite	Il s'agit de roues dentées en rotation par rapport au porte-satellite. Leur axe de rotation n'est donc pas fixe par rapport au bâti.
Planétaire	Les planétaires sont des roues dentées (pignon ou couronne) qui engrenent avec le ou les satellites.

L'un des deux planétaires ou le porte-satellite peuvent être les pièces d'entrée ou de sortie du mécanisme. Dans la majorité des cas, l'un des deux planétaires est l'entrée, l'autre planétaire est fixe et le porte-satellite est la sortie.

Pour déterminer la loi entrée-sortie d'un train épicycloïdal, on peut soit écrire les conditions de roulement sans glissement aux points de contact entre le satellite et les planétaires (en  $I$  et  $J$ ) ou bien utiliser la relation de Willis

$$\frac{\omega_{s/ps}}{\omega_{entrée/ps}} = \frac{\omega_{sortie/0} - \omega_{ps/0}}{\omega_{entrée/0} - \omega_{ps/0}} = (-1)^n \frac{\prod (Z, D, R)_{menantes}}{\prod (Z, D, R)_{menées}}$$

L'utilisation d'un train épicycloïdal nécessite d'imposer la vitesse angulaire par rapport au bâti de deux des trois entrées possibles.

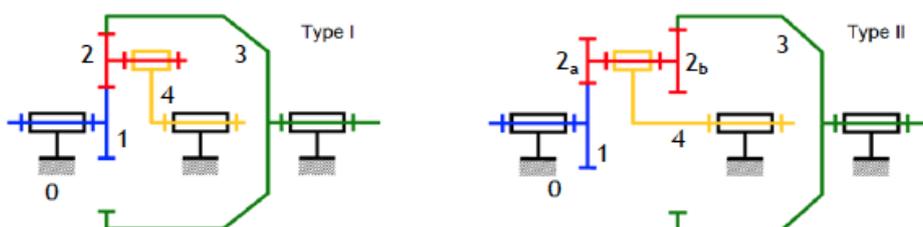
Dans la pratique :

- on bloque souvent l'une d'entre-elles ;
- on impose la vitesse angulaire à la deuxième ;
- la troisième est alors donnée par la relation de Willis en prenant en compte la vitesse nulle de l'entrée bloquée.

La démarche à utiliser pour déterminer le rapport de transmission d'un train épicycloïdal

1. Écrire la relation de Willis et calculer la raison de base sans tenir compte du fait que certains éléments sont bloqués ou ont une vitesse imposée ;
2. Simplifier la relation obtenue en tenant compte des particularités : éléments ayant une vitesse nulle ou imposée ;
3. En déduire le rapport de transmission recherché.

### Conditions géométriques de fonctionnement



Les conditions géométriques indispensables au montage et au fonctionnement du train épicycloïdal impliquent des relations entre les diamètres (ou rayons) primitifs des différentes roues dentées. Ces relations peuvent se traduire sous la forme de relations liant les nombres de dents de roues dentées à condition que leurs modules soient égaux.

- exemple pour le train de type I :  $D_3 = D_1 + 2D_2 \Rightarrow Z_3 = Z_1 + 2Z_2$  ;
- exemple pour le train de type II :  $R_1 + R_{2a} + R_{2b} = R_3 \Rightarrow Z_1 + Z_{2a} + Z_{2b} = Z_3$ .

## Modélisations de la machine à courant continu

**Introduction** – La machine à courant continu est un actionneur très couramment employé en sciences de l'ingénieur. Outre le fait que cet actionneur électrique reste encore utilisé, son intérêt en CPGE réside dans la simplicité du modèle. Nous présentons ici différentes formes de ce modèle qui permettent de faire la synthèse des outils de modélisation employé en PSI.

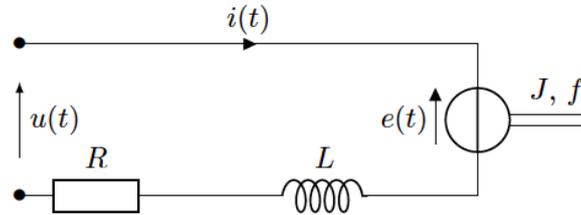


FIGURE 22 – schéma électrique – machine à courant continu

Les paramètres pris en compte sont

- $u(t)$ , tension d'alimentation ;
- $i(t)$ , intensité du courant électrique dans le rotor ;
- $e(t)$ , force électromotrice ;
- $R$ , résistance électrique du rotor ;
- $L$ , inductance du rotor ;
- $C_m$ , couple moteur ;
- $C_r$ , couple résistant ;
- $\omega(t)$ , vitesse angulaire du rotor ;
- $J$ , inertie du rotor ;
- $f$ , facteur de frottement fluide entre le rotor et le stator ;
- $k$ , constante de couple égale à la constante de force électromotrice.

**Modélisation analytique (équations différentielles)** – Le modèle basique de la machine à courant continu est fondé sur les quatre équations

$$\begin{aligned} u(t) &= e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \\ C_m(t) - C_r(t) &= J \frac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t) \\ e(t) &= k\omega(t) \\ C_m(t) &= ki(t) \end{aligned}$$

À partir de ces quatre équations, il est aisé d'obtenir l'équation différentielle reliant la vitesse angulaire du rotor à la tension d'alimentation du moteur. Après calculs, en supposant  $C_r(t) = 0$  on obtient l'équation ci-après

$$\frac{LJ}{k} \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \frac{1}{k} (fL + RJ) \frac{d\omega}{dt} + \left( k + \frac{fR}{k} \right) \omega(t) = u(t)$$

La résolution de cette équation de manière analytique ne pose pas de problème particulier. Afin de concrétiser et de visualiser la vitesse angulaire du rotor de la machine en fonction de son alimentation électrique, nous prendrons les valeurs numériques suivantes des paramètres du moteur

$$\begin{aligned} R &= 4,4 \, \Omega & L &= 4,88 \times 10^{-3} \, \text{H} & k &= 4,91 \times 10^{-3} \, \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} \\ J &= 10^{-5} \, \text{kg} \cdot \text{m}^2 & f &= 1,5 \times 10^{-3} \, \text{N} \cdot \text{m} \cdot (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

**Modélisation analytique (domaine de Laplace)** – Dans le cadre des conditions de Heaviside, les équations analytiques sont transformées dans le domaine de Laplace

$$\begin{aligned} U(s) &= E(s) + RI(s) + LsI(s) \\ C_m(s) - C_r(s) &= Js\Omega(s) + f\Omega(s) \\ E(s) &= k\Omega(s) \\ C_m(s) &= kI(s) \end{aligned}$$

L'utilisation de la transformation de Laplace a permis de passer d'équations différentielles à des équations algébriques dont la résolution est plus aisée mais qui nécessite la transformation inverse de Laplace qui n'est pas nécessairement simple à mettre en oeuvre dans le cas général. Le calcul conduit, toujours en supposant  $C_r(s) = 0$ , à écrire  $\Omega(s)$  en fonction de  $U(s)$ .

$$\Omega(s) = \frac{k}{LJs^2 + (fL + RJ)s + k^2 + fR}U(s)$$

La fraction rationnelle correspond à la fonction de transfert du modèle.

**Modélisation (causale) par schéma-blocs** – On utilise couramment les schéma-blocs pour modéliser les équations de Laplace sous forme graphique. On obtient alors un modèle causal de la machine à courant continu qui représente l'algorithme de calcul de sa fonction de transfert et qui n'a pas de sens physique particulier. L'entrée et la sortie sont clairement identifiées. La figure 23 a été tracée avec le module Xcos du logiciel Scilab.

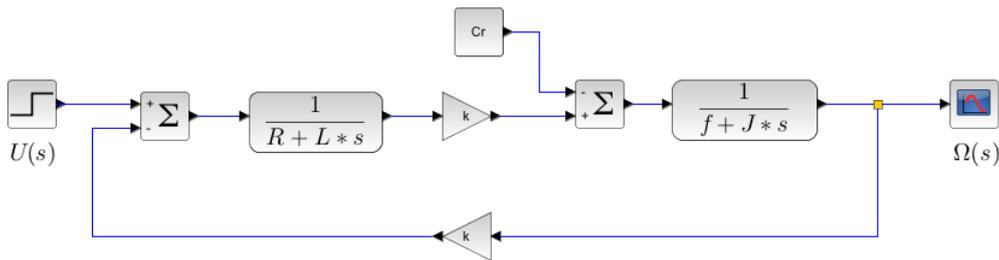


FIGURE 23 – Schéma-bloc de la machine à courant continu

**Modélisation (acausale) par association de composants** – La modélisation acausale des systèmes est réalisée par l'association de « composants » virtuels visualisables par des boîtes. Celle-ci « contient » les paramètres, les variables et les équations du modèle. Le langage faisant référence est Modelica utilisé notamment par la suite Scilab/Xcos/Coselica. Par exemple, le modèle en langage Modelica du ressort linéaire est donné à la figure 24



```
partial model TwoFlanges
  "Base class for a component withh
  two translational 1D flanges"
  Interfaces.Flange_a flange_a;
  Interfaces.Flange_b flange_b;
end TwoFlanges
```

```
model Ideal Spring "Linear 1D
translational spring"
  extends Interfaces.Compliant;
  parameter SI.Distance s_rel0=0
  "unstretched spring lenght";
  parameter Real c(
  final unit="N/m",
  final min=0) = 1 "Raideur";
  equation
  f = c*(s_rel - s_rel_0);
end Spring;
```

FIGURE 24 – Modèle du ressort linéaire en langage Modelica

La connaissance du langage Modelica n'est pas nécessaire pour réaliser des modèles puisque l'on ne manipule que les « boîtes » des composants associés à l'instar de la structure physique du système. Un modèle acausal n'a, *a priori*, ni entrée ni sortie, celles-ci étant déterminées par le logiciel lors de la simulation réalisant l'expérimentation virtuelle réalisée. On peut ainsi modéliser des systèmes complexes et multiphysiques (mécanique, électrique, hydraulique, etc.) chacun des composants étant relié à un autre composant par la puissance (ou l'énergie) transmise entre chacun d'eux grâce à deux variables conjuguées.

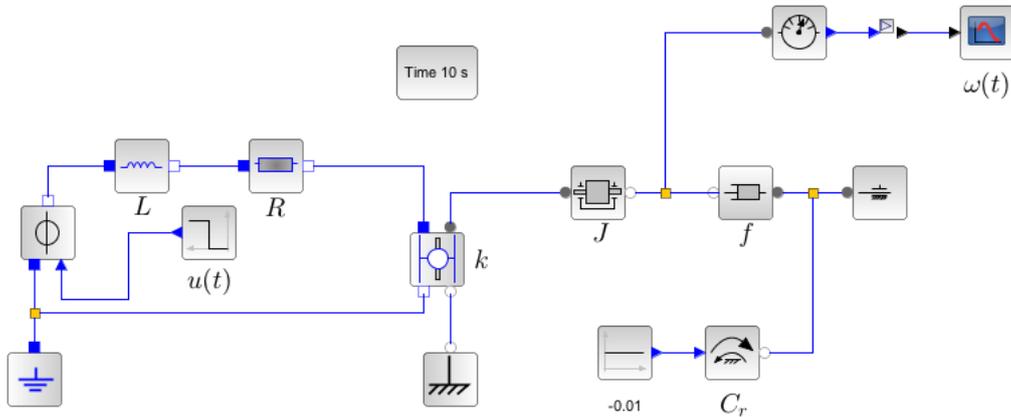


FIGURE 25 – Modèle acausal de la machine à courant continu